Matematikk 2
Oversiktsforelesninger uke 9

Frode Rønning

Nøkkelbegreper uke 9

- Variabelskifte for dobbeltintegraler (14.4)
  - Integrasjon i polarkoordinater
- Divergens og curl av vektorfelt i planet (16.3)
- Greens teorem i planet (16.3)
- Divergensteoremet i planet (16.3)

Itererte dobbeltintegral

Hvis $f(x,y)$ er kontinuerlig på et begrenset y-enkelt område D, gitt ved $a \le x \le b$ og $c(x) \le y \le d(x)$, så gjelder

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

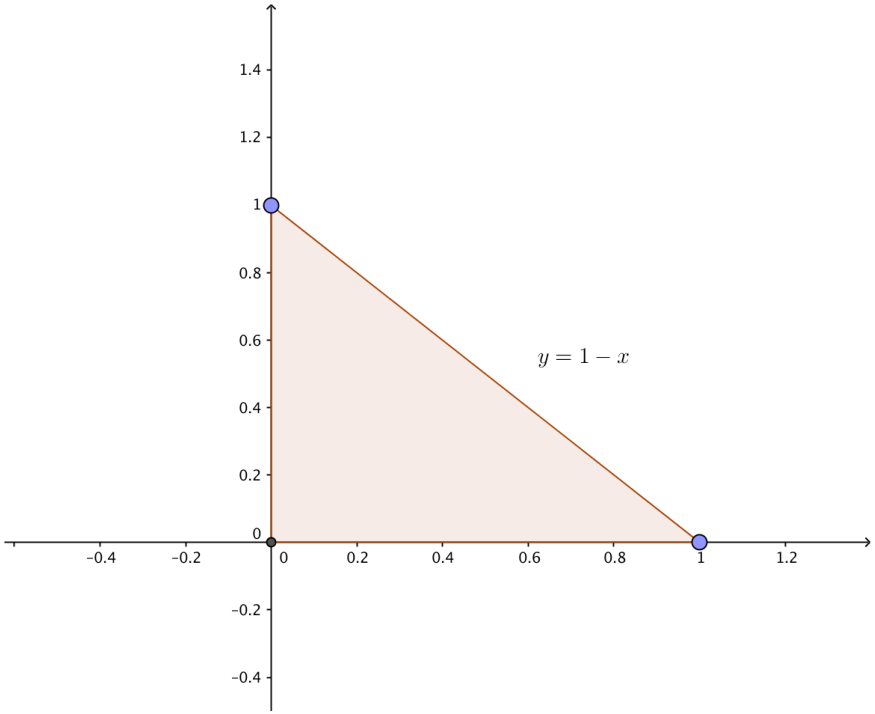
Hvis $f(x,y)$ er kontinuerlig på et begrenset x-enkelt område D, gitt ved $c \le y \le d$ og $a(y) \le x \le b(y)$, så gjelder

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

(Teorem 2, Adams & Essex, s. 815)

Hvis D er både x- og y-enkelt, kan vi velge intergrasjonsrekkefølge, men det kan tenkes at den ene rekkefølgen er vanskeligere enn den andre, eller til og med umulig. Det kan også tenkes at begge rekkefølgene er vanskelige/umulige.

Hva gjør vi da?



Eks.:

Regn ut $\iint\limits_T e^{\frac{y-x}{y+x}} dA$ der T er trekanten til venstre

Variabelskifte i enkeltintegral

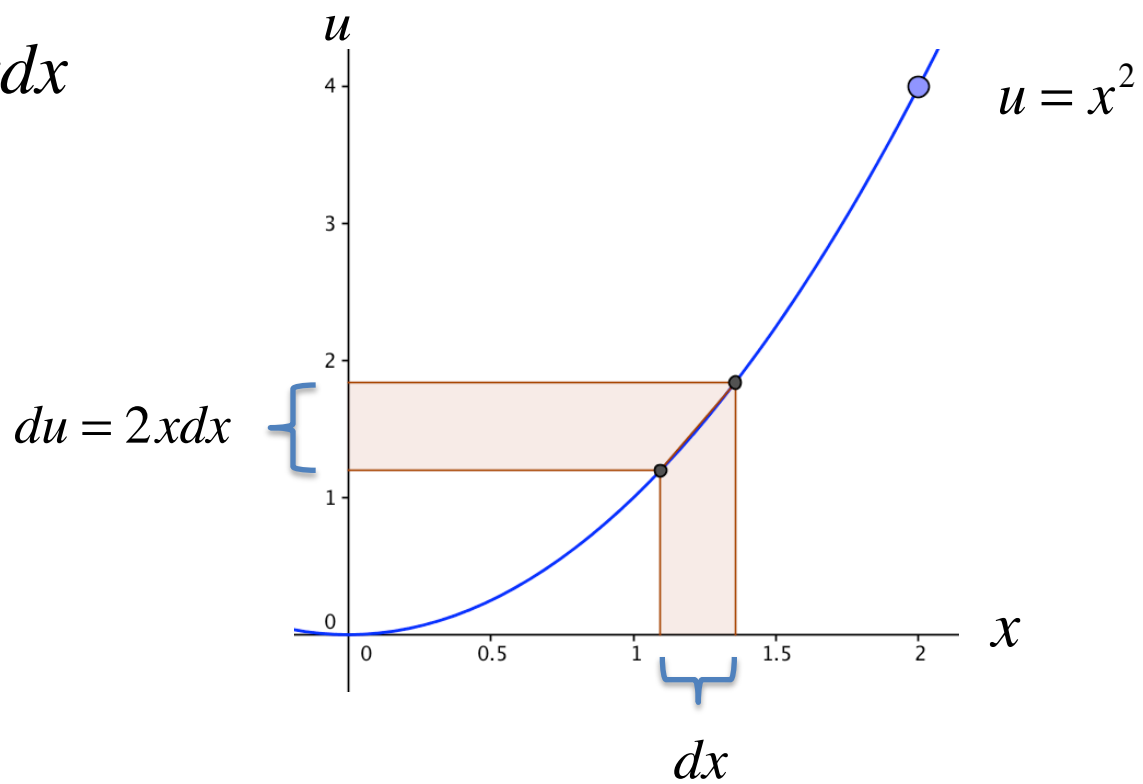
$$I = \int_0^2 xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^4 e^u du = \frac{1}{2}\left[e^u\right]_{u=0}^{u=4} = \frac{1}{2}\left(e^4 - 1\right)$$

$$u = x^2$$

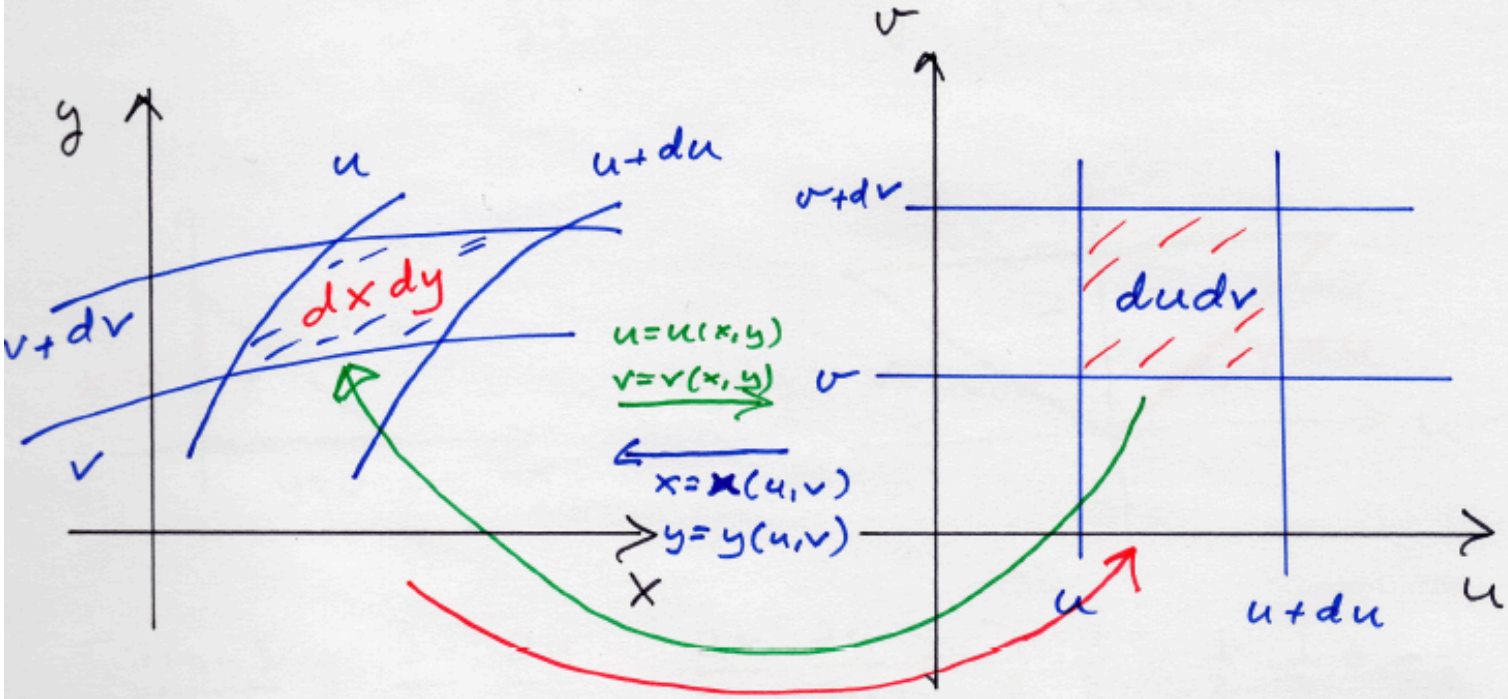
$$du = 2xdx$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= g(x) \\ du &= g'(x)dx \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= g^{-1}(u) \\ dx &= \frac{1}{g'(x)}du \end{aligned}}$$

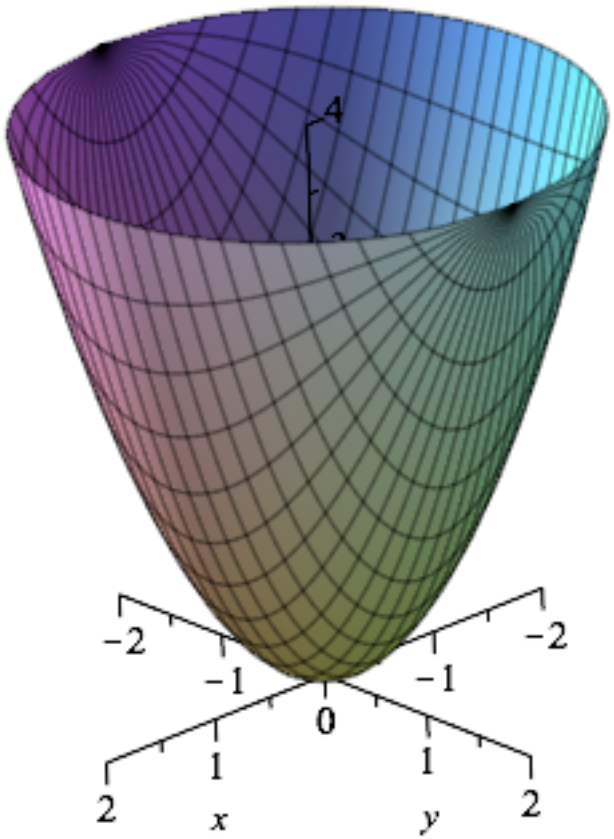


Variabelskifte i dobbeltintegral



$$dx\,dy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

$$du\,dv = \frac{1}{\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|} dx\,dy$$



Paraboloiden $z = x^2 + y^2, \quad z \leq 4$

Nøkkelbegreper uke 9

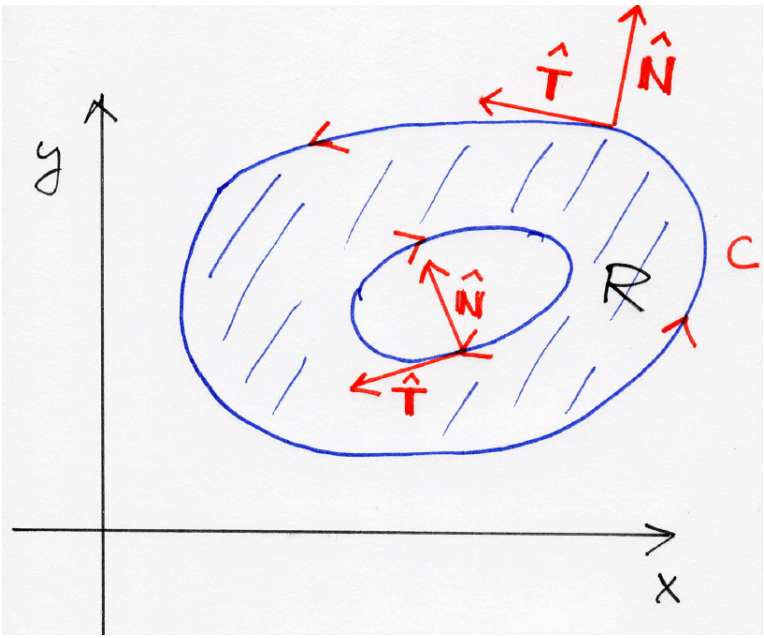
- Variabelskifte for dobbeltintegraler (14.4)
  - Integrasjon i polarkoordinater
- Divergens og curl av vektorfelt i planet (16.3)
- Greens teorem i planet (16.3)
- Divergensteoremet i planet (16.3)

R et regulært, lukket område i xy-planet med rand C som består av stykkevis glatte, lukkede kurver

$\mathbf{F}(x,y) = F_1(x,y)\mathbf{i} + F_2(x,y)\mathbf{j}$ et glatt vektorfelt på R

$\hat{\mathbf{T}} = T_1(x,y)\mathbf{i} + T_2(x,y)\mathbf{j}$: enhetstangentvektor til C i positiv omløpsretning

$\hat{\mathbf{N}} = T_2(x,y)\mathbf{i} - T_1(x,y)\mathbf{j}$: ytre enhetsnormalvektor til C

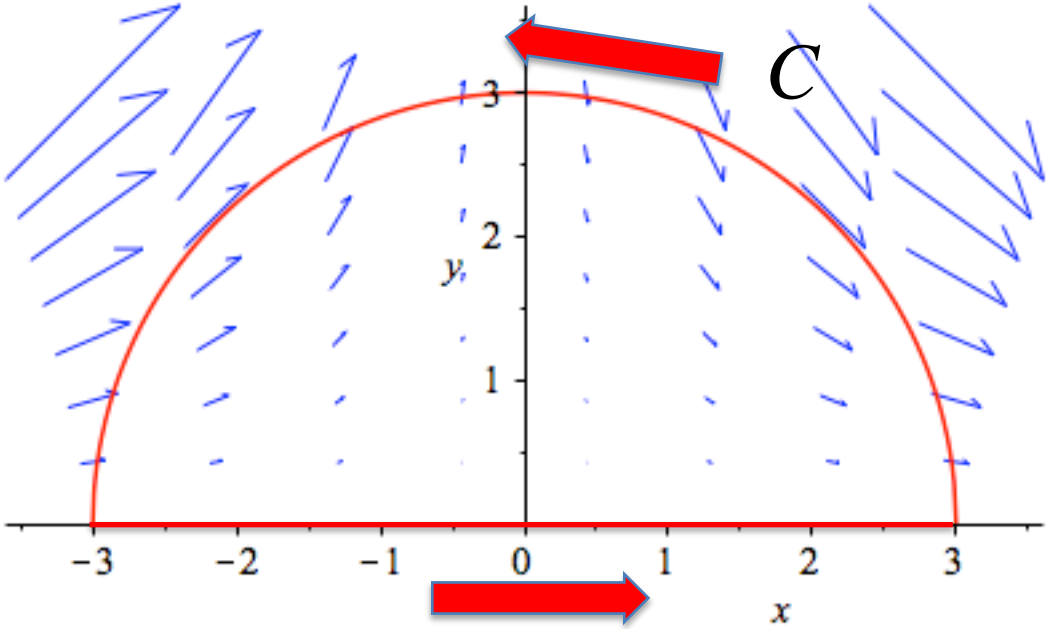


Greens teorem

$$\oint_C \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{T}}\, ds = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA$$

Divergensteoremet

$$\oint_C \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, ds = \iint_R \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dA$$

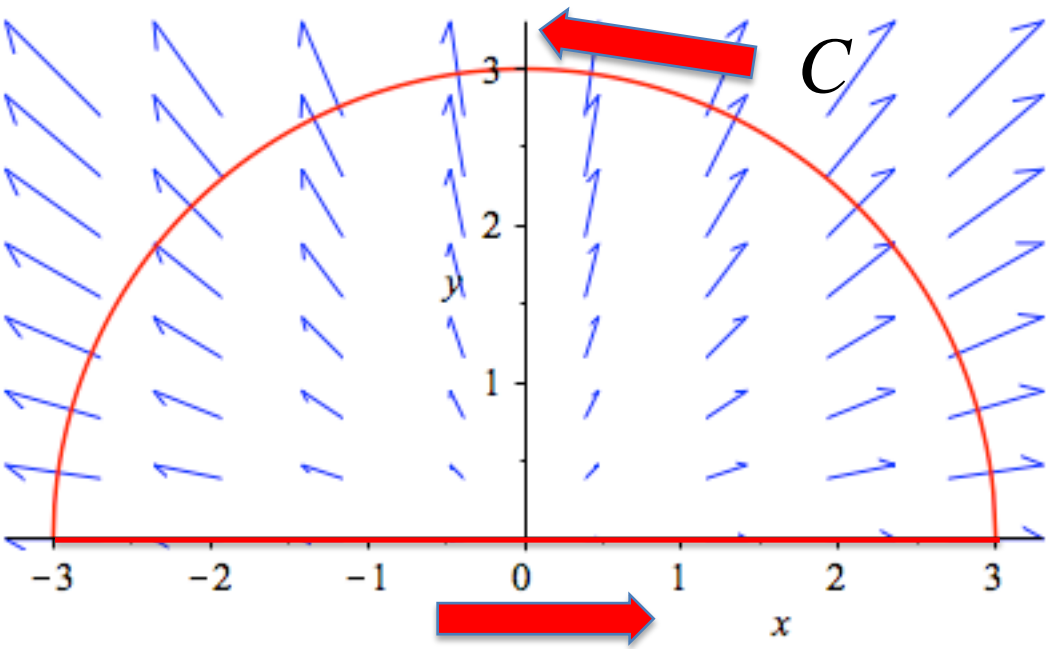


Eks. 1

$$\mathbf{F}(x,y) = x^2 y\mathbf{i} - xy^2\mathbf{j}$$

$$\oint_C \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{T}}\,ds = -\frac{81}{4}\pi$$

$$\oint_C \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}}\,ds = 0$$



Eks. 2

$$\mathbf{F}(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

$$\oint_C \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{T}}\,ds = 0$$

$$\oint_C \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}}\,ds = 9\pi$$