Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

10.2.27:

a) La
$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i}+, u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$$
og
$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}.$$
Vi beregner
$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 =$$
$$(u_1+v_1)^2 + (u_2+v_2)^2 + (u_3+v_3)^2 =$$
$$u_1^2 + 2u_1v_1 + v_1^2 + u_2^2 + 2u_2v_2 + v_2^2 + u_3^2 + 2u_3v_3 + v_3^2 =$$
$$|\mathbf{u}|^2 + 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + |\mathbf{v}|^2.$$

b) La θ være vinkelen mellom $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$. Vi har
$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|,$$
siden $\cos\theta \leq 1$.

c) Vi ser nå at
$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + |\mathbf{v}|^2 \leq |\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}| + |\mathbf{v}|^2 = (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2,$$
og følgelig er
$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|.$$
Hvorfor heter dette trekantulikheten?

10.2.31: Vi projiserer først $\mathbf{w}$ på $\mathbf{a}$, og konstruerer
$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{w}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}.$$
Skalaren $\frac{\mathbf{w}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ angir lengden til $\mathbf{w}$ i retning $\mathbf{a}$, mens $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ er en enhetsvektor i denne retningen. Vi kan nå velge
$$\mathbf{v} = \mathbf{w} - \mathbf{u}.$$
For det første står $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ ortogonalt på hverandre (hvordan sjekker du det?), og for det andre har vi
$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}.$$
Det kan være lurt å lage en skisse her.

10.3.12: Vi beregner

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha)\mathbf{k}$$

SIden arealet av parallellogrammet utspent av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er både er lengden av kryssproduktet mellom dem, men også $\sin\alpha - \beta$ (hvorfor?), må

$$\sin\alpha - \beta = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha.$$

10.3.14: Arealet av grunnflaten i tetraederet er $\frac{1}{2}|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|$ siden denne er halve parallellogrammet utspent av $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$. Høyden i pyramiden får vi ved å projisere $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$, så om vinkelen mellom disse er θ, får vi

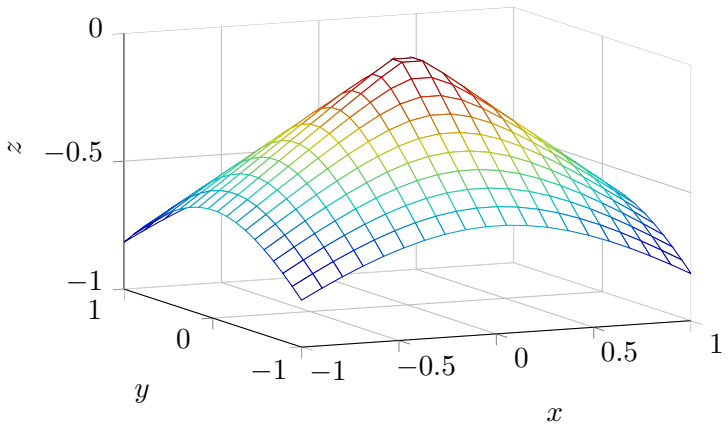
$$V = \frac{1}{3}Ah = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}|\mathbf{v} \times \mathbf{w}| \cdot |\mathbf{u}|\cos\theta = \frac{1}{6}|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|.$$

10.5.5: Her har vi

$$\begin{aligned} z &= x^2 + 2y^2 \\ &= \left(\frac{x}{1}\right)^2 + \left(\frac{y}{1/\sqrt{2}}\right)^2, \end{aligned}$$

slik at dette er en elliptisk paraboloide sentrert i origo. Når man skal skissere flaten kan det være nyttig å observere at skjæringene med hvert plan $z = h$ (der $h > 0$) er ellipser med halvakser på $\sqrt{h}$ og $\sqrt{h/2}$.

10.6.6: Siden det er ϕ som holdes konstant, beskriver likningen $\phi = 2\pi/3$ en kjegle (uten



indre). Hvis vi ønsker å beskrive den i kartesiske koordinater (ikke en del av oppgaven) kan vi observere at

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}R\cos(\theta), \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}R\sin(\theta), \quad z = -\frac{1}{2}R,$$

på flaten, og derfor at

$$z = -\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Review Exercise 10.16: Hver av de to likningene

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 1, \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

beskriver et plan. To plan vil enten

1. skjære hverandre i en rett linje,
2. være like, eller
3. ha tomt snitt (når de er parallelle, men ikke like).

Hvis vi trekker den andre likningen fra den første ender vi opp med $z = 1$. Derfor er likningene ekvivalente med

$$\begin{aligned} z &= 1, \\ x + y &= -1, \end{aligned}$$

som beskriver en rett linje (altså den første situasjonen). Setter vi $x = t$ ser vi at vi kan parametrisere linjen som

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (t, -1 - t, 1) \\ &= (0, -1, 1) + t(1, -1, 0) \end{aligned}$$

for $t \in \mathbb{R}$.

Challenging Problem 10.1: Trekanten ABP har grunnflate $|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|$ og areal $\frac{1}{2}|(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_P) \times (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_P)|$, så høyden må vel bli

$$d = \frac{\frac{1}{2}|(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_P) \times (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_P)|}{\frac{1}{2}|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|} = \frac{|(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_P) \times (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_P)|}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|}.$$