TMA4105 Matematikk 2

Vår 2015

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 13

Alle oppgavenummer refererer til **8. utgave** av **Adams & Essex' Calculus: A Complete Course**.

5 **Exercise 13.1.4**

De kritiske punktene finner vi hvor de partiellderiverte er 0. For funksjonen $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$ har vi

$$f_x(x, y) = 4x^3 - 4y, \quad f_y(x, y) = 4y^3 - 4x.$$

Disse er 0 når $x = y^3$ og $y^9 - y = 0$, altså er må vi ha $y = -1$, 0, eller 1; og da altså $x = y$. Dermed har vi funnet at de kritiske punktene til f er $(-1, -1)$, $(0, 0)$, og $(1, 1)$.

For å klassifisere dem, ser vi på de andrederiverte

$$f_{xx}(x, y) = 12x^2, \qquad f_{xy}(x, y) = -4$$
$$f_{yy}(x, y) = 12y^2,$$

Vi ser deretter på

$$B^2 - AC = f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy}$$

evaluert i de forskjellige kritiske punktene.

For $(-1, -1)$ og $(1, 1)$ har vi

$$B^2 - AC = 16 - 144 < 0, \quad A > 0,$$

som gir lokale minima.

For $(0, 0)$ har vi

$$B^2 - AC = 16 - 0 > 0,$$

som gir en sadel.

6 **Exercise 13.1.26**

Vi vil maksimere $f(a, b, c) = ab^2c^3$ for positive a, b og c under betingelsen $a+b+c = 30$. Ved å skrive $a = 30 - b - c$ og sette inn i f, skal vi maksimere

$$f(b, c) = 30b^2c^3 - b^3c^3 - b^2c^4.$$

Vi løser ligningene

$$f_b(b, c) = 60bc^3 - 3b^2c^3 - 2bc^4 = 0, \qquad f_c(b, c) = 90b^2c^2 - 3b^3c^2 - 4b^2c^3 = 0.$$

Siden både b og c er positive, kan de deles med, som forenkler ligningene til

$$\begin{aligned} f_c(b,c) = 0 &\iff 90b^2c^2 - 3b^3c^2 - 4b^2c^3 = 0 \\ &\iff 90 - 3b - 4c = 0 \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} f_b(b,c) = 0 &\iff 60bc^3 - 3b^2c^3 - 2bc^4 = 0 \\ &\iff 60 - 3b - 2c = 0. \end{aligned}$$

Ved å løse det resulterende lineære ligningssystemet, får vi løsningen $b = 10$ og $c = 15$, som gir $a = 5$.

Det kritiske punktet svarer til et maksimum. For å se dette, merk først at vi maksimerer f over mengden[1]

$$a, b, c \geq 0 \qquad a + b + c = 30,$$

som er en lukket og begrenset mengde. Siden f er kontinuerlig, vet vi at et maksimum eksisterer. Et slikt maksimumspunkt forekommer enten i kritiske punkt, singulære punkt eller i randpunkt. Siden f er 0 langs randen og er deriverbar i alle indre punkt, må maksimum forekomme i et kritisk punkt. Siden vi kun fant ett kritisk punkt, må dette punktet være maksimumspunktet.

$\boxed{7}$ Exercise 13.2.6

Funksjonen er kontinuerlig og domenet lukket og begrenset, så vi har absolutte maksimum og minimum.

Vi finner de første partiellderiverte av funksjonen ved hjelp av produktregelen:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= y(1 - x - y) - xy = y(1 - 2x - y), \\ f_y(x,y) &= x(1 - x - y) - xy = x(1 - x - 2y). \end{aligned}$$

Kritiske punkter er punkter hvor begge disse er lik 0, så vi må finne alle punkter (x, y) slik at dette stemmer.

Ved å sette de partiellderiverte lik 0 og manipulere ligningene, kommer vi frem til hvis $y = 0$ må x være 0 eller 1, og vice versa, alle på randen av domenet. Hvis $y \neq 0$ må vi ha

$$1 - 2x - y = 0 \quad \text{og} \quad 1 - x - 2y = 0,$$

som gir $x = \frac{1}{3} = y$.

Funksjonen evaluert i dette punktet er

$$f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27},$$

mens den på randa av området er 0, altså er randa minimum, og $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ maksimum på det oppgitte domenet.

[1] I følge oppgaven skal vi kun se på punkter $a, b, c > 0$, men det skader ikke å ta med punkter der en av a, b og c er 0, siden f er 0 i disse punktene.

8 Exercise 13.2.9

Vi starter med å finne de kritiske punktene. De deriverte blir

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial x}(x,y) &= (1-2x^2-2xy)e^{-x^2-y^2} \\ \frac{\partial T}{\partial y}(x,y) &= (1-2y^2-2xy)e^{-x^2-y^2},\end{aligned}$$

slik at de kritiske punktene må tilfredstille

$$\begin{aligned}1-2x^2-2xy &= 0, \\ 1-2y^2-2xy &= 0.\end{aligned}$$

Om vi trekker de to likningene fra hverandre finner vi at $x^2 = y^2$, eller at $y = \pm x$. Valget $y = -x$ leder ikke til noen løsninger, mens innsetting av $y = x$ leder til $x = \pm 1/2$. T har derfor to kritiske punkter $\pm(1/2, 1/2)$, som svarer til $T = \pm e^{-1/2}$. Merk at de to kritiske punktene ligger i det indre av enhetsdisken.

Det gjenstår å sjekke randverdiene, som er enklest å gjøre ved hjelp av polarkoordinater. Vi finner

$$\begin{aligned}T(\theta) &= (\cos(\theta)+\sin(\theta))e^{-1} \\ &= \sqrt{2}\cos(\theta-\pi/4)e^{-1},\end{aligned}$$

hvor vi umiddelbart ser at største og minste verdi på randen er $\pm\sqrt{2}e^{-1}$. (Om du ikke kjenner til overgangen fra første til andre linje er det fullt mulig å derivere også.) Siden

$$\left(\frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}e^{-1}}\right)^2 = \frac{e}{2} > 1$$

har vi

$$\sqrt{2}e^{-1} < e^{-1/2}.$$

Den største temperaturen i disken er derfor $T = e^{-1/2}$ i punktet $(1/2, 1/2)$, og den minste er $T = -e^{-1/2}$ i punktet $(-1/2, -1/2)$.

9 Exercise 13.2.12

Vi kaller funksjonen vår $f(x,y,z) = xz + yz$, og begynner med å finne de partiellderiverte

$$f_x(x,y,z) = z, \quad f_y(x,y,z) = z, \quad f_z(x,y,z) = x+y.$$

Dermed er alle de indre kritiske punktene til funksjonen i xy–planet langs linjen $x = -y$, hvor funksjonen er identisk lik 0.

På sfæren $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ kan vi skrive funksjonen som

$$f(x,y,z) = (x+y)z = \pm(x+y)\sqrt{1-x^2-y^2} = g(x,y),$$

hvor $x^2 + y^2 \leq 1$.

Vi observerer at funksjonen er 0 på randa $x^2 + y^2 = 1$, og at den har både positive og negative verdier på områdets indre, altså kan vi redusere til å se på området $x^2 + y^2 < 1$. Her kan vi finne de kritiske punktene til g:

$$\begin{aligned} g_x(x,y) &= \sqrt{1 - x^2 - y^2} - \frac{(x+y)(-2x)}{2\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ &= \frac{1 - x^2 - y^2 - xy - y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ g_y(x,y) &= \frac{1 - x^2 - y^2 - xy - y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}. \end{aligned}$$

Disse er 0 når

$$2x^2 + y^2 + xy = 1 = x^2 + 2y^2 + xy,$$

altså når $x^2 = y^2$.

Hvis $x = -y$ er $g = 0$, så $f = 0$.

Hvis $x = y$, har vi $2x^2 + x^2 + x^2 = 1$, så $x^2 = \frac{1}{4}$, og dermed er $x = \pm\frac{1}{2}$.

Fra dette konkluderer vi med at g, med de to valgene av fortegn, har i alt fire kritiske punkter, siden de forskjellige valgene av fortegn gir forskjellige z–koordinater. Disse punktene gir verdiene $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Vi har dermed sett på alle punktene hvor f kan ha ekstremalverdier, nemlig randa til kula og de kritiske punktene, og kommet frem til at vi har maksimum $\frac{1}{\sqrt{2}}$, i punktene $\pm\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, og minimum $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, i punktene $\pm\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Merk at alle disse fire punktene ligger på randa.

10 Exercise 13.3.3

a) En normalvektor for planet er $\mathbf{N} = (1, 2, 2)$. Hvis $\mathbf{x}$ er det nærmeste punktet til origo på planet må $\mathbf{N}$ og $\mathbf{x}$ være parallelle (lag en tegning). Vi har dermed

$$3 = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x} = |\mathbf{N}||\mathbf{x}| = 3|\mathbf{x}|,$$

og derfor $|\mathbf{x}| = 1$. Merk at det første likhetstegnet kommer fra definisjonen av planet. (Dette er den desidert enkleste metoden dersom man kun ønsker å vite avstanden, og ikke hvilket punkt som er det nærmeste.)

b) Vi ønsker å minimere $x^2 + y^2 + z^2$, gitt at $x + 2y + 2z = 3$. Ved å løse likningen for x ser vi at dette er ekvivalent med å minimere

$$f(y,z) = (3 - 2y - 2z)^2 + y^2 + z^2.$$

Merk at f er glatt, og at $f(y,z) \to \infty$ når $|(y,z)| \to \infty$. Ved å velge en tilstrekkelig stor disk sentrert i origo kan vi bruke Teorem 2 i 13.1 for å konkludere at det finnes et globalt minimum. Dette punktet må være et kritisk punkt. De kritiske punktene må oppfylle likningssystemet

$$\begin{aligned} 2(3 - 2y - 2z)(-2) + 2y &= 0, \\ 2(3 - 2y - 2z)(-2) + 2z &= 0, \end{aligned}$$

hvor vi umiddelbart kan konkludere at $y = z$ ved å trekke de to likningene fra hverandre. Ved innsetting leder dette til $y = z = 2/3$, og derfor $x = 3 - 4/3 - 4/3 = 1/3$ ved å benytte likningen for planet. Siden dette er det eneste kritiske punktet må det svare til det globale minimumet. Spesielt er

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1$$

avstanden til planet.

c) Lagrangefunksjonen blir

$$L(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x + 2y + 2z - 3).$$

som leder til

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2x + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2y + 2\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= 2z + 2\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x + 2y + 2z - 3 = 0. \end{aligned}$$

Fra de tre første likningene finner vi $x = -\lambda/2$, $y = -\lambda$ og $z = -\lambda$. Setter vi dette inn i den siste likningen finner vi

$$-\frac{\lambda}{2} - 2\lambda - 2\lambda - 3 = 0,$$

eller $\lambda = -2/3$. Dette gir igjen $x = 1/3$, $y = 2/3$ og $z = 2/3$. Dette må nødvendigvis være et globalt minimum, fordi gradienten til $x + 2y + 2z - 3$ aldri er null og fordi $x^2 + y^2 + z^2 \to \infty$ når $|(x, y, z)| \to \infty$. Avstanden til planet blir derfor

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1.$$

11 Exercise 13.3.12

Vi ønsker å maksimere $\sum_{i=1}^n x_i$ gitt at $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$. Vi skriver $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Merk at $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$ beskriver en lukket og begrenset mengde i $\mathbb{R}^n$, og at funksjonen

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i$$

er kontinuerlig. Det finnes altså et slikt maksimum, og vi kan finne det ved hjelp av Lagrangemultiplikatormetoden fordi

$$\nabla \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 1 \right) = 2\mathbf{x},$$

som aldri er null på n-sfæren (hvorfor?). Lagrangefunksjonen blir

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = \sum_{i=1}^n x_i + \lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 1 \right),$$

som leder til

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 1 + 2\lambda x_i = 0 \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1 = 0.$$

Merk at vi nødvendigvis må ha $\lambda \neq 0$, for ellers kan ikke de n første likningene være oppfylt. Vi får derfor $x_i = -1/(2\lambda)$ for $i = 1, \ldots, n$, som innsatt i den siste likningen gir

$$\frac{n}{4\lambda^2} - 1 = 0,$$

eller $\lambda = -\sqrt{n}/2$ ($\lambda = \sqrt{n}/2$ vil gi minimum), og derfor $x_i = 1/\sqrt{n}$ for $i = 1, \ldots, n$. Maksimum blir derfor

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

12 Chapter Review 13.12

På grunn av symmetri vil ellipsoiden inneholde boksen så lenge den inneholder punktet $(1, 2, 3)$, altså når

$$\frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} + \frac{9}{c^2} \leq 1.$$

Siden vi er ute etter å minimere volumet kan vi like godt sette likhetstegn her; dersom punktet ikke ligger på overflaten av ellipsoiden vil vi alltid kunne gjøre ellipsoiden litt mindre og fortsatt ha punktet innenfor.

Hvorfor vil det finnes et minimum? Merk at likningen som a, b, c må oppfylle impliserer at $a \geq 1$, $b \geq 2$ og $c \geq 3$. Spesielt betyr dette at volumet til ellipsoiden går mot uendelig når $|(a, b, c)| \to \infty$. På tilsvarende måte som i 13.3.3 b) kan vi derfor konkludere at det må finnes et globalt minimum. Siden

$$\nabla\left(\frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} + \frac{9}{c^2} - 1\right) = -2(a^{-1}\mathbf{i} + b^{-1}\mathbf{j} + c^{-1}\mathbf{k}) \neq 0$$

kan vi finne dette minimumet med Lagrangemultiplikatormetoden.

Vi får Lagrangefunksjonen

$$L(a, b, c, \lambda) = \frac{4\pi}{3}abc + \lambda\left(\frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} + \frac{9}{c^2} - 1\right),$$

og derfor likningene

$$\frac{\partial L}{\partial a} = \frac{4\pi}{3}bc - \lambda\frac{2}{a^3} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial b} = \frac{4\pi}{3}ac - \lambda\frac{8}{b^3} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial c} = \frac{4\pi}{3}ab - \lambda\frac{18}{c^3} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} + \frac{9}{c^2} - 1 = 0.$$

Om vi multipliserer de tre første likningene med a, b og c får vi

$$\frac{4\pi}{3}abc - \frac{2\lambda}{a^2} = 0, \quad \frac{4\pi}{3}abc - \frac{8\lambda}{b^2} = 0, \quad \frac{4\pi}{3}abc - \frac{18\lambda}{c^2} = 0,$$

som impliserer at

$$\frac{2\lambda}{a^2} = \frac{8\lambda}{b^2} = \frac{18\lambda}{c^2}.$$

Siden vi nødvendigvis må ha $\lambda \neq 0$ (fordi $a, b, c > 0$), betyr dette at

$$\frac{1}{a^2} = \frac{4}{b^2} = \frac{9}{c^2} = \frac{1}{3},$$

der den siste likheten kommer fra innsetting i likningen for $\frac{\partial L}{\partial \lambda}$.

Den minste ellipsoiden som inneholder boksen svarer følgelig til $a = \sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{3}$ og $c = 3\sqrt{3}$, med volum

$$\frac{4\pi}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 24\sqrt{3}\pi.$$