TMA4105 Matematikk 2
Vår 2015

Løsningsforslag — Øving 12

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Alle oppgavenummer referer til **8. utgave** av **Adams & Essex' Calculus: A Complete Course**.

5 **Exercise 16.1.6**

Vi finner

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{F} &= \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3 \\ &= y^2 - z^2 + x^2\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ xy^2 & -yz^2 & zx^2 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i}(0 - (-2yz)) - \mathbf{j}(2xz - 0) + \mathbf{k}(0 - 2xy) \\ &= 2yz\mathbf{i} - 2xz\mathbf{j} - 2xy\mathbf{k}.\end{aligned}$$

6 **Exercise 16.2.6**

Det er enklest å starte med venstre side, for så å prøve å få ut høyre side. Vi har

$$\nabla \times \mathbf{F} = (\partial_y F_3 - \partial_z F_2)\mathbf{i} + (\partial_z F_1 - \partial_x F_3)\mathbf{j} + (\partial_x F_2 - \partial_y F_1)\mathbf{k}$$

og derfor

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) =& (\partial_x\partial_y F_2 - \partial_y^2 F_1 - \partial_z^2 F_1 + \partial_x\partial_z F_3)\mathbf{i} \\ &+ (\partial_y\partial_z F_3 - \partial_z^2 F_2 - \partial_x^2 F_2 + \partial_x\partial_y F_1)\mathbf{j} \\ &+ (\partial_x\partial_z F_1 - \partial_x^2 F_3 - \partial_y^2 F_3 + \partial_y\partial_z F_2)\mathbf{k} \\ =& (\partial_x(\partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3) - \partial_x^2 F_1 - \partial_y^2 F_1 - \partial_z^2 F_1)\mathbf{i} \\ &+ (\partial_y(\partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3) - \partial_x^2 F_2 - \partial_y^2 F_2 - \partial_z^2 F_2)\mathbf{j} \\ &+ (\partial_z(\partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3) - \partial_x^2 F_3 - \partial_y^2 F_3 - \partial_z^2 F_3)\mathbf{k} \\ =& (\partial_x(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \Delta F_1)\mathbf{i} + (\partial_y(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \Delta F_2)\mathbf{j} + (\partial_z(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \Delta F_3)\mathbf{k} \\ =& \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \Delta\mathbf{F}.\end{aligned}$$

Merk at vi la til og trakk fra $\partial_x^2 F_1 \mathbf{i}$, og tilsvarende for de to andre komponentene.

7 **Exercise 16.2.10**

Fra 16.2.10 har vi

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{F} &= \nabla(\nabla\cdot\mathbf{F}) - \nabla\times(\nabla\times\mathbf{F})\\ &= \nabla(0) - \nabla\times(0)\\ &= 0,\end{aligned}$$

som viser at komponentene til $\mathbf{F}$ er harmoniske.

Siden $\nabla\times\mathbf{F} = 0$ finnes det et (skalar)potensial φ slik at $\mathbf{F} = \nabla\varphi$. Denne funksjonen er også harmonisk, siden

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \nabla\cdot(\nabla\varphi)\\ &= \nabla\cdot\mathbf{F}\\ &= 0.\end{aligned}$$

8 **Exercise 16.2.17**

At $\mathbf{F}$ er et divergensfritt (solenoidal) vektorfelt svarer til at $\nabla\cdot\mathbf{F} = 0$. Vi verifiserer:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{F} &= e^{2z} + e^{2z} - 2e^{2z}\\ &= 0,\end{aligned}$$

Siden $\mathbf{F}$ er divergensfritt finnes det et vektorpotensial $\mathbf{G}$ for $\mathbf{F}$, slik at $\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{G}$. Komponentene til dette potensialet må derfor oppfylle

$$\partial_y G_3 - \partial_z G_2 = xe^{2z}, \tag{1}$$
$$\partial_z G_1 - \partial_x G_3 = ye^{2z}, \tag{2}$$
$$\partial_x G_2 - \partial_y G_1 = -e^{2z}. \tag{3}$$

Potensialet $\mathbf{G}$ er ikke entydig, så vi kan ta oss noen friheter når vi finner et. La oss derfor anta at $G_3 = 0$. Ved å integrere Likning (1) og Likning (2) finner vi da

$$\begin{aligned}G_1 &= \frac{1}{2}ye^{2z} + f(x,y)\\ G_2 &= -\frac{1}{2}xe^{2z} + g(x,y),\end{aligned}$$

der Likning (3) impliserer at f og g må oppfylle

$$\partial_x f - \partial_y g = 0.$$

Vi kan like gjerne velge $f = g = 0$. Da ender vi opp med

$$\mathbf{G}(x,y) = \frac{1}{2}ye^{2z}\mathbf{i} - \frac{1}{2}xe^{2z}\mathbf{j}.$$

som vektorpotensial for $\mathbf{F}$. Igjen understrekes det at $\mathbf{G}$ ikke er entydig.

9 **Exercise 16.5.2**

I stedet for å beregne linjeintegralet direkte bruker vi Stokes' teorem. Det er naturlig å la flaten S være den delen av sylinderen $z = y^2$ som ligger innenfor sylinderen $x^2 + y^2 = 4$. Da er $\mathcal{C}$ randen til $\mathcal{S}$, og projeksjonen av $\mathcal{S}$ ned i xy-planet blir disken $x^2 + y^2 \leq 4$. Merk at integralet i oppgaven er lik

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

der

$$\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k},$$

med

$$\nabla \times \mathbf{F} = -2\mathbf{k}.$$

Det neste vi trenger er arealelementet og den oppoverpekende enhetsnormalen på $\mathcal{S}$. Siden punktene på $\mathcal{S}$ tilfredstiller

$$G(x, y, z) = z - y^2 = 0$$

finner vi (merk at $\hat{\mathbf{N}}$ blir oppoverpekende fordi $G_z > 0$)

$$dS = \left| \frac{\nabla G}{G_z} \right| dx\, dy$$
$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{\nabla G}{|\nabla G|},$$

og dermed

$$\hat{\mathbf{N}}\, dS = (-2y\mathbf{j} + \mathbf{k})\, dx\, dy.$$

Vi har nå

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS \\
&= \iint_{x^2+y^2 \leq 4} (-2\mathbf{k}) \cdot (-2y\mathbf{j} + \mathbf{k})\, dx\, dy \\
&= -2 \iint_{x^2+y^2 \leq 4} dx\, dy \\
&= -2 \cdot \pi \cdot 2^2 \\
&= -8\pi,
\end{aligned}$$

der vi har spart litt arbeid ved å benytte at vi kjenner arealet innenfor sirkelen med radius 2.

10 **Exercise 16.5.3**

Integralet er ikke enkelt å beregne i den formen det står, men fra Stokes' teorem er

$$\iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

der $\mathcal{C}$ er sirkelen $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$, orientert mot klokken sett ovenfra. Siden disken $x^2 + y^2 \leq a^2, z = 0$ har samme rand kan vi benytte Stokes' teorem enda en gang for å konkludere at

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} (\nabla \times \mathbf{F})|_{z=0} \cdot \mathbf{k}\, dx\, dy.$$

Siden

$$\begin{aligned}(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} &= \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ 3y & -2xz \end{vmatrix} \\ &= -2z - 3\end{aligned}$$

finner vi derfor

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS &= -3 \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} dx\, dy \\ &= -3 \cdot \pi a^2 \\ &= -3\pi a^2.\end{aligned}$$

11 Exercise 16.5.6

Kurven $\mathcal{C}$ er skjæringskurven mellom sylinderen $x^2 + y^2 = 1$ og flaten $z = 2xy$. Dette kan sees direkte fra uttrykket for $\mathbf{r}$ (husk at $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$). Kall den delen av flaten $z = 2xy$ som ligger innenfor sylinderen for $\mathcal{S}$. Da er $\mathcal{C}$ randen til $\mathcal{S}$, og projeksjonen av $\mathcal{S}$ ned i xy-planet er enhetsdisken. Fra Stokes' teorem er

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS,$$

der

$$\nabla \times \mathbf{F} = 3(x^2 + y^2)\mathbf{k},$$

og $\hat{\mathbf{N}}$ er den oppoverpekende enhetsnormalvektoren.

På flaten $\mathcal{S}$ er

$$G(x, y, z) = z - 2xy = 0,$$

slik at

$$\begin{aligned}dS &= \left| \frac{\nabla G}{G_z} \right| dx\, dy \\ \hat{\mathbf{N}} &= \frac{\nabla G}{|\nabla G|},\end{aligned}$$

og spesielt

$$\hat{\mathbf{N}}\, dS = (-2y\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + \mathbf{k})\, dx\, dy.$$

Vi finner nå

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_{x^2+y^2\leq 1} 3(x^2+y^2)\mathbf{k} \cdot (-2y\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + \mathbf{k})\,dx\,dy \\
&= 3 \iint_{x^2+y^2\leq 1} (x^2+y^2)\,dx\,dy \\
&= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cdot r\,dr\,d\theta \\
&= 3 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} \\
&= \frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$

$\boxed{12}$ Chapter Review 16.12

Igjen vil vi benytte oss av Stokes' teorem. For en slik kurve $\mathcal{C}$ lar vi $\mathcal{S}$ være den delen av planet $x+y+z=1$ som begrenses av $\mathcal{C}$. Da er

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\,dS,$$

der

$$\nabla \times \mathbf{F} = (1-x^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} - (y^2+2xy)\mathbf{k},$$

og $\hat{\mathbf{N}}$ er den oppoverpekende enhetsnormalvektoren.

Siden

$$G(x,y,z) = x+y+z-1 = 0$$

på $\mathcal{S}$, har vi

$$\begin{aligned}
dS &= \left|\frac{\nabla G}{G_z}\right| dx\,dy, \\
\hat{\mathbf{N}} &= \frac{\nabla G}{|\nabla G|},
\end{aligned}$$

og spesielt

$$\hat{\mathbf{N}}\,dS = (\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})\,dx\,dy.$$

Det følger at

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_P (1 - x^2 + 2xy - (y^2+2xy))\,dx\,dy \\
&= \iint_P (1-x^2-y^2)\,dx\,dy,
\end{aligned}$$

der P er projeksjonen av $\mathcal{S}$ ned i xy-planet. For å gjøre dette integralet størst mulig vil vi integrere over det området der integranden er ikke-negativ, altså der $1-x^2-y^2 \geq 0$. Vi må derfor velge P til å være enhetsdisken $x^2+y^2 \leq 1$. Dette svarer til at $\mathcal{C}$ er skjæringskurven mellom sylinderen $x^2+y^2=1$ og planet $x+y+z=1$.

Den største verdien for integralet blir følgelig

$$\begin{aligned}\iint_{x^2+y^2\leq 1}(1-x^2-y^2)\,dx\,dy &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^2)r\,dr\,d\theta \\ &= 2\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$