**Øving 12**

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Alle oppgavenummer referer til **8. utgave** av **Adams & Essex' Calculus: A Complete Course**.

## Oppgaver som blir forelest

**1** **Maple T.A. Test 8, Oppgave 3**

En ring med radius $r = 3$ og senter i origo har massetetthet gitt ved

$$\delta(x, y) = x^2 + \frac{1}{3}y + 7.$$

Hva er ringens massesenter?

**2** **Maple T.A. Test 8, Oppgave 6**

La $R$ være kvadratet med hjørner i $(0, 0)$, $(5, 6)$, $(-6, 5)$ og $(1, 11)$. Kall randen til $R$ for $\mathcal{C}$. Beregn dobbeltintegralet

$$\frac{\pi^2}{8}\iint_R \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\, dA$$

over $R$ ved å benytte divergensteoremet på vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{\pi}{10}\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)^2 (5\mathbf{i} + 6\mathbf{j})$$

for å redusere dobbeltintegralet til et linjeintegral over randen $\mathcal{C}$. Merk at integranden i dobbeltintegralet er lik $\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla\cdot\mathbf{F}$, og at $\sin(x)^2 = (1 - \cos(2x))/2$.

**3** **Eksamen sommer 2011, Oppgave 8**

La $\mathcal{S}$ være flaten gitt ved

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad z = e^{-1},$$

og la $\mathbf{F}$ være vektorfeltet i $\mathbb{R}^3$ gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (e^{y+z} - 2y)\mathbf{i} + (xe^{y+z} + y)\mathbf{j} + e^{x+y}\mathbf{k}.$$

**a)** Vis at

$$\iint_{\mathcal{S}} (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\hat{\mathbf{N}}\, dS = 2\pi,$$

der $\hat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalen til $\mathcal{S}$ som har positiv $z$-komponent.

**b)** La $\mathcal{S}'$ være flaten gitt ved

$$z = e^{-(x^2+y^2)}, \quad z \geq e^{-1}.$$

Regn ut $\iint_{\mathcal{S}'} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}' \, dS$, der $\hat{\mathbf{N}}'$ er enhetsnormalen til $\mathcal{S}'$ som har positiv $z$-komponent. (Hint: Stokes' teorem.)

4 Exercise 16.5.5

## Oppgaver med løsningsforslag

5 Exercise 16.1.6

6 Exercise 16.2.6

7 Exercise 16.2.10

(Hint: Bruk resultatet fra 16.2.6. At en funksjon $\varphi$ er harmonisk betyr at $\Delta\varphi = \nabla^2\varphi := \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0$.)

8 Exercise 16.2.17

9 Exercise 16.5.2

10 Exercise 16.5.3

11 Exercise 16.5.6

12 Chapter Review 16.12