Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 11

Alle oppgavenummer refererer til **8. utgave** av **Adams & Essex' Calculus: A Complete Course**.

5 Exercise 15.6.1

Vi beregner fluksen ut av tetraederets fire sideflater.

For sideflaten som tilfredstiller $x = 0$, har vi at $\mathbf{N} = -\mathbf{i}$, og $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = -x = 0$, så fluksen ut er 0.

For sideflaten som tilfredstiller $z = 0$, har vi $\mathbf{N} = -\mathbf{k}$, og $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = 0$, så fluksen ut er 0.

For sideflaten som tilfredstiller $y = 0$, har vi $\mathbf{N} = -\mathbf{j}$, og $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = -z$. Fluksen ut av denne siden blir dermed

$$\int_0^2 \int_0^{6-3z} (-z)\, dx\, dz = \int_0^2 (-6z + 3z^2)\, dz = -12 + 8 = -4.$$

For den skrå sideflaten $\mathcal{S}$ som ikke ligger i noe koordinatplan, benytter vi oss av det faktum at for en flate på formen $z = f(x, y)$, så er det oppadrettede flate-elementet $d\mathbf{S} = \mathbf{N}\, dS = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right) dx\, dy$. I vårt tilfelle er $f(x, y) = 2 - x/3 - 2y/3$ og

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^3 \int_0^{6-2y} (x\mathbf{i} + z\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right) dx\, dy \\
&= \int_0^3 \int_0^{6-2y} \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\left(2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y\right)\right) dx\, dy \\
&= \int_0^3 \int_0^{6-2y} \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{9}x - \frac{4}{9}y\right) dx\, dy \\
&= \int_0^3 \left(\frac{4}{3}(6-2y) + \frac{1}{18}(6-2y)^2 - \frac{4}{9}y(6-2y)\right) dy \\
&= 10.
\end{aligned}$$

Den totalefluksen ut av tetraederet er altså $10 - 4 = 6$.

Merk, denne oppgaven kan også løses ved å bruke divergensteoremet. En observerer da at div$\mathbf{F} = 1$ og at volumet av tetraederet er 6, så integralet blir $1 \cdot 6 = 6$.

6 Exercise 15.6.12

Her må vi bruke den generelle formelen for flateelementet til en parametrisert flate. Flaten er gitt ved

$$\mathbf{r}(u, v) = e^u \cos(v)\mathbf{i} + e^u \sin(v)\mathbf{j} + u\mathbf{k}, \qquad 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le \pi.$$

Det oppadrettede flateelementet er gitt ved

$$\begin{aligned} d\mathbf{S} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\, du\, dv \\ &= \big(e^u \cos(v)\mathbf{i} + e^u \sin(v)\mathbf{j} + \mathbf{k}\big) \cdot \big(-e^u \sin(v)\mathbf{i} + e^u \cos(v)\mathbf{j}\big)\, du\, dv \\ &= \big(-e^u \cos(v)\mathbf{i} - e^u \sin(v)\mathbf{j} + e^{2u}\mathbf{k}\big)\, du\, dv. \end{aligned}$$

Videre er

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)) = ue^u \sin(v)\mathbf{i} - ue^u \cos(v)\mathbf{j} + e^{2u}\mathbf{k}.$$

Følgelig er fluksen

$$\begin{aligned} \iint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^1 \int_0^\pi \big(-ue^{2u} \sin(v)\cos(v) + ue^{2u} \sin(v)\cos(v) + e^{4u}\big)\, dv\, du \\ &= \int_0^1 \int_0^\pi \big(e^{4u}\big)\, dv\, du \\ &= \frac{\pi}{4}\big(e^4 - 1\big). \end{aligned}$$

7 Exercise 16.1.2

Divergensen til $\mathbf{F}(x,y,z) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ er gitt ved

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(x,y) = \partial_x(y) + \partial_y(x) = 0.$$

Curlen er gitt ved

$$\nabla \times \mathbf{F}(x,y) = (1-1)\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

8 Exercise 16.1.9

Vi uttrykker først $\mathbf{F}$ i kartesiske koordinater. Siden $r = \sqrt{x^2+y^2}$ og $\sin(\theta) = y/r = y/\sqrt{x^2+y^2}$, får vi

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{j}.$$

Vi får følgelig divergensen

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F}(x,y,z) &= \partial_x\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + \partial_y\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + \partial_z(0) \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+y^2} - y^2/\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Curlen til vektorfeltet er gitt ved

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{F}(x,y,z) &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \sqrt{x^2+y^2} & y/\sqrt{x^2+y^2} & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + \left[\partial_x \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) - \partial_y \left(\sqrt{x^2+y^2} \right) \right] \mathbf{k} \\
&= -\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right) \mathbf{k}.
\end{aligned}
$$

En alternativ fremgangsmåte er å først vise at

$$
\begin{aligned}
\partial_x r &= \cos(\theta), & \partial_x \sin(\theta) &= \frac{-\cos(\theta)\sin(\theta)}{r}, \\
\partial_y r &= \sin(\theta), & \partial_y \sin(\theta) &= \frac{\cos^2(\theta)}{r},
\end{aligned}
$$

og deretter bruke disse direkte i utledningene. For eksempel blir divergensen

$$
\nabla \cdot \mathbf{F}(r,\theta) = \partial_x (r) + \partial_y (\sin(\theta)) = \cos(\theta) + \frac{\cos^2(\theta)}{r},
$$

som man kan sjekke stemmer overens med det vi fant i kartesiske koordinater. Curlen regnes ut tilsvarende.

9 Exercise 16.4.5

Vi skal finne fluksen ut overflaten $\mathcal{S}$ til den solide ballen B med sentrum $S = (2,0,3)$ og radius $r = 3$, av vektorfeltet $F = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$. Ved Divergensteoremet er dette

$$
\begin{aligned}
I = \oiint_{\mathcal{S}} F \bullet \hat{N}\, dS &= \iiint_B \operatorname{div} F \, dV \\
&= \iiint_B 2(x+y+z)\, dV.
\end{aligned}
$$

Dette integralet kan enten evalueres ved å skifte koordinater til kulekoordinater sentrert i S, eller å observere at det er $2(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})V$, hvor $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ er tyngdepunktet til B og V er volumet.

Tyngdepunktet til en ball er dens senter og volumet er $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, slik at

$$
I = 2(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})V = 2(2+0+3)\frac{4}{3}\pi 3^3 = 360\pi.
$$

10 Exercise 16.4.12

Vi har at

$$
\nabla \cdot \mathbf{F} = z + (1+z) - 2z = 1,
$$

så

$$
\iiint_R \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \frac{1}{6}\pi a^3,
$$

der R er regionen i første oktant begrenset av sfæren og koordinatplanene. Ved å beregne fluksen av $\mathbf{F}$ ut av de tre plane flatene på randa til R, kan vi bruke Divergensteoremet til å finne fluksen ut av den sfæriske delen.

Delen av randa der $x = 0$ har normalvektor $-\mathbf{i}$. Vi har $\mathbf{F}(0, y, z) \cdot (-\mathbf{i}) = -y\mathbf{i}$. Ved å integrere i polarkoordinater[1] får vi at fluksen ut av denne delen er

$$\int_0^a \int_0^{\pi/2} (-r\cos(\theta))r \, d\theta \, dr = -\frac{1}{3}a^3.$$

Delen av randa der $y = 0$ har normalvektor $-\mathbf{j}$, og siden $\mathbf{F}(x, 0, z) \cdot \mathbf{j} = 0$, er fluksen ut 0.

Delen av randa der $z = 0$ har normalvektor $-\mathbf{k}$. Vi har $\mathbf{F}(x, y, 0) \cdot (-\mathbf{k}) = 2x\mathbf{i}$ og fluksen ut blir

$$\int_0^a \int_0^{\pi/2} 2r\cos(\theta)r \, d\theta \, dr = \frac{2}{3}a^3.$$

Fluksen ut av den sfæriske delen av randa til R er derfor

$$\frac{1}{6}\pi a^3 - \frac{1}{3}a^3.$$

11 Exercise 16.4.29

La $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$. Vi har at

$$\nabla \cdot (\phi\mathbf{c}) = \frac{\partial\phi}{\partial x}c_1 + \frac{\partial\phi}{\partial y}c_2 + \frac{\partial\phi}{\partial z}c_3 = (\nabla\phi) \cdot \mathbf{c},$$

og Divergensteoremet gir

$$\iiint_D \nabla\phi \cdot \mathbf{c} \, dV = \iint_{\mathcal{S}} \phi(\mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{N}}) \, dS,$$

det vil si

$$\left(\iiint_D \nabla\phi \, dV\right) \cdot \mathbf{c} = \left(\iint_{\mathcal{S}} \phi\hat{\mathbf{N}} \, dS\right) \cdot \mathbf{c}.$$

Siden $\mathbf{c}$ er en vilkårlig vektor, ser vi (for eksempel ved å la $\mathbf{c}$ være $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$) at vi må ha

$$\iiint_D (\nabla\phi) \, dV = \iint_{\mathcal{S}} \phi\hat{\mathbf{N}} \, dS.$$

12 Review Exercise 16.2

Vi observerer at vi kan skrive sylinderen som $(x - a)^2 + y^2 = a^2$, og kaller delen av denne som ligger mellom planene for $\mathcal{S}$, orientert med normalvektor utover. S er den solide sylinderen.

La D_1 være toppen av sylinderen, med $z = b$, og D_2 bunnen av sylinderen, med $z = 0$, begge orientert utover, altså med normaler henholdsvis $\hat{\mathbf{N}}_1 = \mathbf{k}$ og $\hat{\mathbf{N}}_2 = -\mathbf{k}$

[1] Mer presist er transformasjonen vi bruker $y = r\cos(\theta)$, $z = r\sin(\theta)$.

For å finne fluksen gjennom $\mathcal{S}$ av $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + \cos(z^2)\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$, div$\mathbf{F} = 1 + e^z$, bruker vi Divergensteoremet, dermed må vi først regne ut

$$\begin{aligned}\iiint_S \text{div}\mathbf{F}\, dV &= \iint_{D_2} dx\, dy \int_0^b (1 + e^z)\, dz \\ &= \pi a^2 \left(b + e^b - 1\right).\end{aligned}$$

Husk at integralet er additivt, slik at

$$\oiint_{\mathcal{S}\cup D_1 \cup D_2} = \oiint_{\mathcal{S}} + \oiint_{D_1} + \oiint_{D_2},$$

dermed kan vi finne $\oiint_{\mathcal{S}}$ ved å regne ut de to andre.

Vi har

$$\iint_{D_1} \mathbf{F} \bullet \mathbf{k}\, dA = \iint_{D_1} e^b\, dA = \pi a^2 e^b,$$

og

$$\iint_{D_2} \mathbf{F} \bullet (-\mathbf{k})\, dA = \iint_{D_2} e^0\, dA = -\pi a^2.$$

Dette gir, ved å vise til Divergensteoremet,

$$\begin{aligned}\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet (-\mathbf{k})\hat{\mathbf{N}}\, dA &= \iiint_S \text{div}\mathbf{F}\, dV - \left(\iint_{D_1} \mathbf{F} \bullet \mathbf{k}\, dA + \iint_{D_2} \mathbf{F} \bullet (-\mathbf{k})\, dA\right) \\ &= \pi a^2 \left(b + e^b - 1\right) - \left(\pi a^2 e^b - \pi a^2\right) \\ &= \pi a^2 b.\end{aligned}$$