Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 10

Alle oppgavenummer referer til **8. utgave** av **Adams & Essex' Calculus: A Complete Course**.

5 Exercise 14.7.2

Ved å derivere likningen for planet finner vi

$$5\frac{\partial z}{\partial x} = 3, \quad 5\frac{\partial z}{\partial y} = 4,$$

og derfor

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2}\, dx\, dy \\ &= \sqrt{2}\, dx\, dy. \end{aligned}$$

Hvis vi kaller flaten for R har vi at arealet til R blir

$$\begin{aligned} \iint_R dS &= \sqrt{2} \iint_{x^2+4y^2 \le 4} dx\, dy \\ &= \sqrt{2} \cdot \pi \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 2\sqrt{2}\pi, \end{aligned}$$

der vi har brukt at en ellipse med halvakser a og b har areal πab (det er selvsagt også mulig å regne dobbeltintegralet med et iterert integral). Merk at likningen $x^2+4y^2 = 4$ kan skrives som

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{1}\right)^2 = 1,$$

slik at halvaksene blir 2 og 1.

6 Exercise 14.7.20

På grunn av symmetri må vi ha $\bar{x} = \bar{y} = 0$, slik at det bare gjenstår å beregne $\bar{z}$. Dette gjøres enklest ved å benytte sylinderkoordinater. Vi finner først at

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} re^{-r^2}\, dr\, d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} re^{-r^2}\, dr \end{aligned}$$

gir volumet til legemet. Substitusjonen $u = r^2$ gir

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^\infty e^u \, du \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Vi finner nå

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{V} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{e^{-(x^2+y^2)}} z \, dz \, dx \, dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{e^{-r^2}} zr \, dz \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^\infty re^{-2r^2} \, dr \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\infty e^{-u} \, du \\ &= \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

hvor vi har brukt substitusjonen $u = 2r^2$.

7 Exercise 14.7.32

Denne oppgaven er skreddersydd for sylinderkoordinater, da $D = r$ og sylindrene er konsentriske. Vi kan beskrive legemet som

$$\{[r, \theta, z] : 0 \leq z \leq c, \, 0 \leq \theta < 2\pi, \, a \leq r \leq b\}.$$

Treghetsmomentet blir dermed

$$\begin{aligned} I &= \int_0^c \int_0^{2\pi} \int_a^b r^2 \rho r \, dr \, d\theta \, dz \\ &= c \cdot 2\pi \cdot \rho \int_a^b r^3 \, dr \\ &= \frac{\pi \rho c}{2}(b^4 - a^4), \end{aligned}$$

mens massen blir

$$\begin{aligned} m &= \int_0^c \int_0^{2\pi} \int_a^b \rho r \, dr \, d\theta \, dz \\ &= c \cdot 2\pi \cdot \rho \int_a^b r \, dr \, d\theta \\ &= \pi \rho c (b^2 - a^2). \end{aligned}$$

Ved å bruke treghetsmomentet og massen finner vi treghetsradien

$$\begin{aligned} \bar{D} &= \sqrt{\frac{I}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{b^2 + a^2}{2}}, \end{aligned}$$

hvor vi ser at $a \leq \bar{D} \leq b$, slik man kan forvente.

8 **Exercise 15.5.2**

Kulen er grafen til

$$\mathbf{r}(\phi,\theta) = a(\sin(\phi)\cos(\theta)\mathbf{i} + \sin\phi\sin(\theta)\mathbf{j} + \cos(\phi)\mathbf{k}), \quad 0 \le \phi \le \pi,\ 0 \le \theta < 2\pi.$$

Vi har

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} &= a(\cos(\phi)\cos(\theta)\mathbf{i} + \sin(\phi)\sin(\theta)\mathbf{j} + \cos(\phi)\mathbf{k})\\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} &= a(-\sin(\phi)\sin(\theta)\mathbf{i} + \sin(\phi)\cos(\theta)\mathbf{j})\end{aligned}$$

slik at

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a\cos(\phi)\cos(\theta) & a\sin(\phi)\sin(\theta) & a\cos(\phi) \\ -a\sin(\phi)\sin(\theta) & a\sin(\phi)\cos(\theta) & 0 \end{vmatrix}\\ &= a^2(-\sin(\phi)^2\cos(\theta)\mathbf{i} + \sin(\phi)^2\sin(\theta)\mathbf{j} + \cos(\phi)\sin(\phi)\mathbf{k}).\end{aligned}$$

Vi finner nå

$$\begin{aligned} dS &= \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right| d\phi\, d\theta\\ &= a^2\sqrt{\sin(\phi)^4\cos(\theta)^2 + \sin(\phi)^4\sin(\theta)^2 + \cos(\phi)^2\sin(\phi)^2}\, d\phi\, d\theta\\ &= a^2\sin(\phi)\sqrt{\sin(\phi)^2(\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2) + \cos(\phi)^2}\, d\phi\, d\theta\\ &= a^2\sin(\phi)\, d\phi\, d\theta,\end{aligned}$$

som var det vi skulle vise.

9 **Exercise 15.5.4**

Merk at kulen har radius $2a$ og at likningen for sylinderen kan skrives som

$$x^2 + (y-a)^2 = a^2,$$

slik at denne har radius a og har akse som er parallell med z-aksen og krysser xy-planet i $(0,a)$. Dette er illustrert i Figur 1.

Fordi vi arbeider på en kule er det nyttig å gå over til kulekoordinater. Da blir kulen

$$R = 2a,$$

og sylinderen blir

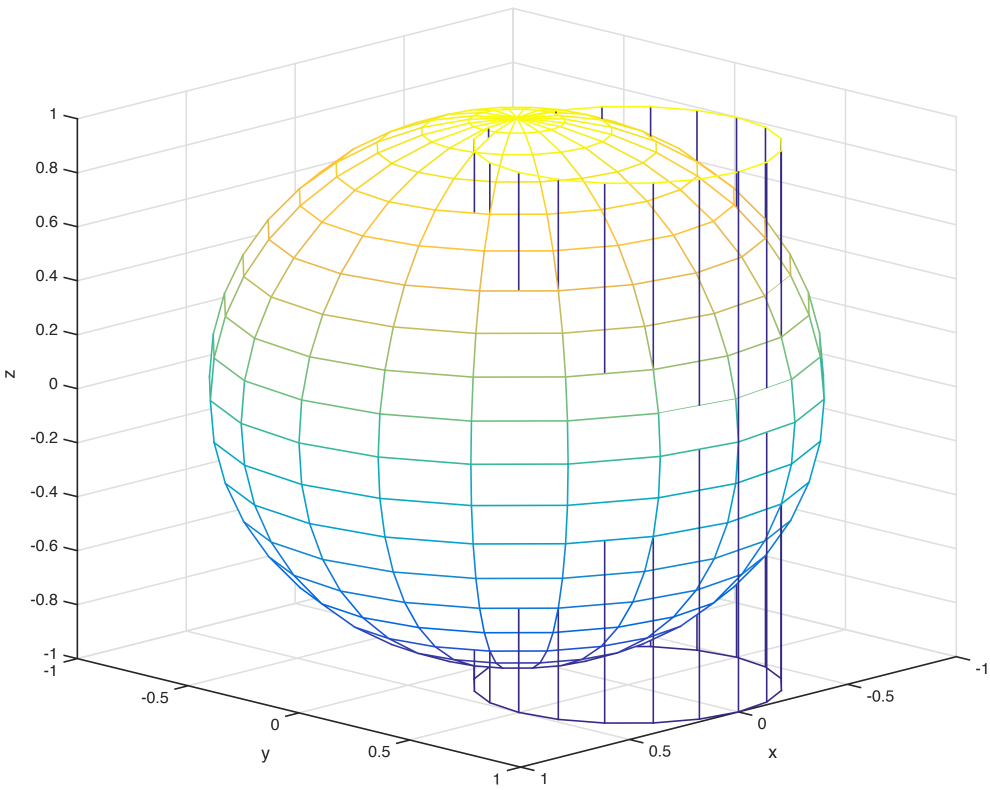
$$R^2\sin(\phi)^2\cos(\theta)^2 + R^2\sin(\phi)^2\sin(\theta)^2 = 2aR\sin(\phi)\sin(\theta),$$

eller

$$R\sin(\phi) = 2a\sin(\theta).$$

Innsiden av sylinderen oppfyller derfor ulikheten

$$R\sin(\phi) \le 2a\sin(\theta),$$



Figur 1: Kulen og sylinderen i Exercise 15.5.4, med $a = 1/2$.

og spesielt er dette ekvivalent med

$$\sin(\phi) \leq \sin(\theta)$$

på kulen. Hvis vi ytterligere begrenser oss til den delen av kulen som også ligger i første oktant er dette ekvivalent med ulikheten

$$\phi \leq \theta.$$

På grunn av symmetri må arealet til den delen av kulen som ligger innenfor sylinderen være fire ganger arealet til den som i tillegg ligger i første oktant (se figuren).

Det ønskede arealet blir nå

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\theta} (2a)^2 \sin(\phi)\, d\phi\, d\theta \\ &= 16a^2 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos(\theta))\, d\theta \\ &= 8a^2(\pi - 2). \end{aligned}$$

$\boxed{10}$ **Exercise 15.5.15**

Vi finner først arealelementet. Siden $z = x^2$ beskriver løsningene til likningen

$$G(x, y, z) = x^2 - z = 0$$

har vi

$$\begin{aligned} dS &= \left|\frac{\nabla G}{G_z}\right| dx\, dy \\ &= \frac{\sqrt{(2x)^2 + 0^2 + (-1)^2}}{|-1|}\, dx\, dy \\ &= \sqrt{1 + 4x^2}\, dx\, dy. \end{aligned}$$

Paraboloiden skjærer flaten slik at skjæringskurven har projeksjon

$$x^2 = 1 - 3x^2 - y^2,$$

eller

$$4x^2 + y^2 = 1$$

i xy-planet. Likningen beskriver en ellipse. Vi må derfor integrere over

$$\{(x, y) : 0 \le x \le 1/2,\ 0 \le y \le \sqrt{1 - 4x^2}\}$$

siden vi befinner oss i første oktant.

Vi finner

$$\begin{aligned} \iint_S xz\, dS &= \int_0^{1/2} \int_0^{\sqrt{1-4x^2}} x \cdot x^2 \cdot \sqrt{1 + 4x^2}\, dy\, dx \\ &= \int_0^{1/2} x^3 \sqrt{1 + 4x^2} \sqrt{1 - 4x^2}\, dx \\ &= \int_0^{1/2} x^3 \sqrt{1 - 16x^4}\, dx \\ &= \frac{1}{64} \int_0^1 \sqrt{u}\, du \\ &= \frac{1}{96}, \end{aligned}$$

der vi har brukt substitusjonen $u = 1 - 16x^4$.

11 Chapter Review 14.12

Den første ulikheten,

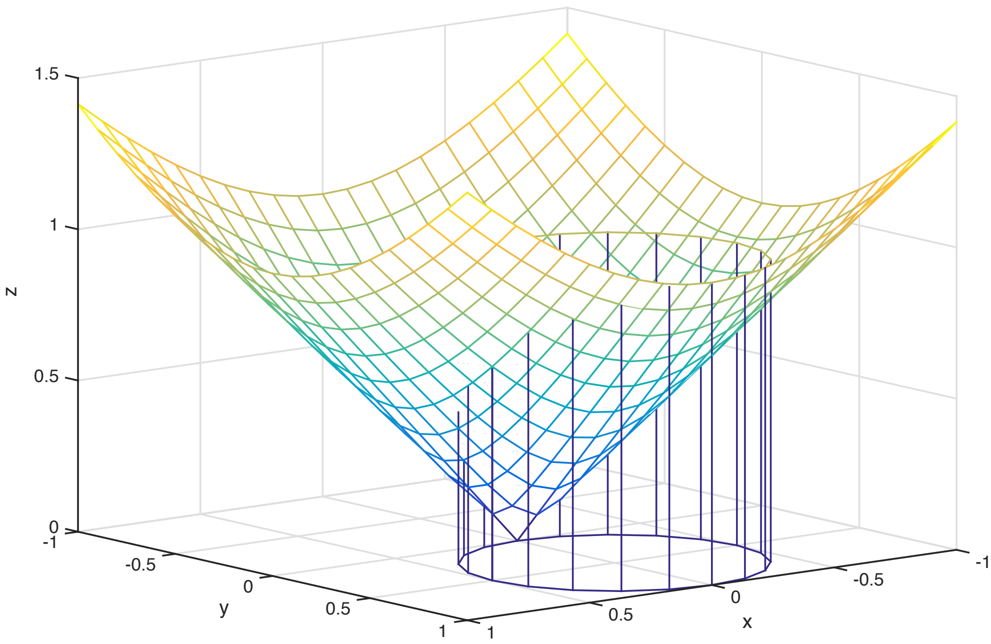
$$0 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2},$$

beskriver det som ligger på utsiden av kjeglen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. I sylinderkoordinater er dette ekvivalent med

$$0 \le z \le r.$$

Den andre ulikheten,

$$x^2 + y^2 \le 2ay, \tag{1}$$



Figur 2: Legemet vi skal finne treghetsmomentet til i Chapter Review 14.12 ligger innenfor sylinderen og utenfor kjeglen. I figuren er $a = 1/2$.

eller

$$x^2 + (y - a)^2 \leq a^2,$$

beskriver det som ligger innenfor den sirkulær sylinderen med radius a og akse som er parallell med z-aksen og skjærer xy-planet i $(0, a)$. Om vi går over til sylinderkoordinater i Likning (1) finner vi

$$r^2 \leq 2ar\sin(\theta),$$

eller

$$r \leq 2a\sin(\theta).$$

Vi kan derfor beskrive V som

$$V = \{[r, \theta, z] : 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq r \leq 2a\sin(\theta), 0 \leq z \leq r\}$$

i sylinderkoordinater. Se gjerne Figur 2. Merk at vi bare behøver å inklude θ opp til π fordi $\sin(\theta)$ er negativ for $\theta \in (\pi, 2\pi)$, som gjør at det er ingen r som oppfyller $0 \leq r \leq 2a\sin(\theta)$. Dette er spesielt viktig når vi setter opp integralet, ellers vil treghetsmomentet bli feil.

Treghetsmomentet til V om z-aksen blir nå

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} \int_0^{2a\sin(\theta)} \int_0^{r} r^2 \rho r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= \rho \int_0^{\pi} \int_0^{2a\sin(\theta)} r^4 \, dr \, d\theta \\ &= \rho \int_0^{\pi} \frac{1}{5} \left(2a\sin(\theta)\right)^5 \, d\theta \\ &= \frac{32}{5} \rho a^5 \int_0^{\pi} \sin(\theta)(1-\cos(\theta)^2)^2 \, d\theta, \end{aligned}$$

der vi har brukt at $\sin(\theta)^2 = 1 - \cos(\theta)^2$. Benytter vi nå substitusjonen $u = \cos(\theta)$ ender vi opp med

$$\begin{aligned} I &= \frac{32}{5} \rho a^5 \int_{-1}^{1} (1-u^2)^2 \, du \\ &= \frac{32}{5} \rho a^5 \int_{-1}^{1} (1 - 2u^2 + u^4) \, du \\ &= \frac{512}{75} \rho a^5. \end{aligned}$$

$\boxed{12}$ Chapter Review 15.4

Planet beskriver løsningene til likningen

$$G(x,y,z) = x + y + z - 1 = 0,$$

slik at arealelementet blir

$$\begin{aligned} dS &= \left| \frac{\nabla G}{G_z} \right| dx \, dy \\ &= \frac{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}}{|1|} \, dx \, dy \\ &= \sqrt{3} \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Vi må nå finne projeksjonen av flaten ned i xy-planet for å finne ut hva vi skal integrere over. (Det kan være til hjelp å lage en skisse her.) Setter vi $z = 0$ i likningen for planet finner vi

$$x + y = 1,$$

slik at projeksjonen ned i xy-planet er den rettvinklede trekanten begrenset av x- og y-aksen samt linjen $y = 1 - x$ for $0 \leq x \leq 1$.

Vi kan nå regne ut integralet. Vi finner

$$\begin{aligned}
\iint_S xyz\,dS &= \int_0^1 \int_0^{1-x} xy(1-x-y)\sqrt{3}\,dy\,dx \\
&= \sqrt{3}\int_0^1 \int_0^{1-x} x((1-x)y-y^2)\,dy\,dx \\
&= \sqrt{3}\int_0^1 x\left((1-x)\frac{1}{2}(1-x)^2 - \frac{1}{3}(1-x)^3\right)\,dx \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}}\int_0^1 x(1-x)^3\,dx \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}}\int_0^1 (1-u)u^3\,du \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right) \\
&= \frac{1}{40\sqrt{3}},
\end{aligned}$$

der vi har brukt substitusjonen $u = 1 - x$.