Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 9

Alle oppgavenummer refererer til **8. utgave** av **Adams & Essex' Calculus: A Complete Course**.

5 Exercise 14.3.3

Siden funksjonen er positiv, kan vi integrere i hvilken rekkefølge vi vil.

$$\begin{aligned}\iint_S \frac{y}{1+x^2}\,dA &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^1 \frac{y}{1+x^2}\,dy\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\left[\arctan x\right]_{x=-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

6 Exercise 14.3.14

Vi finner volumet ved å integrere høyden $z = z(x,y)$ over integrasjonsområdet S

$$\begin{aligned}V &= \iint_S z\,dA = \int_0^1\int_0^1 \frac{2xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy\\ &= \int_0^1 \left[y\ln(x^2+y^2)\right]_0^1 dy\\ &= \int_0^1 y\left(\ln(1+y^2) - \ln y^2\right) dy\\ &= \frac{1}{2}\left[(1+y^2)\left(\ln(1+y^2)-1\right) - \left(y^2\left(\ln y^2 - 1\right)\right)\right]_0^1\\ &= \ln 2.\end{aligned}$$

Merk at vi har brukt grensen $\lim_{y\to 0} y\ln y = 0$ i den siste overgangen.

En alternativ, kanskje enklere, måte løse denne oppgaven er å bruke observasjonen om integrasjonsområdet T fra Oppgave 14.3.13.

7 Exercise 14.4.7

Vi skal evaluere integralet

$$I = \iint_Q y\,dA,$$

hvor Q er delene av disken $x^2 + y^2 \leq a^2$ som ligger i første kvadrant. For slike sirkelsektorlignende områder lønner det seg ofte å utføre et variabelskifte fra kartesiske til polarkoordinater.

I polarkoordinater er området Q gitt ved $0 \leq r \leq a$ og $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, arealelementet er $dA = r\,dr\,d\theta$, og $y = r\sin\theta$.

Vi får dermed

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a r \sin\theta r\,dr\,d\theta \\ &= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^a r^2\,dr\right) \\ &= \frac{a^3}{3}. \end{aligned}$$

8 Exercise 14.4.18

Vi skriver integralet i polarkoordinater.

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dA}{(1+x^2+y^2)^k} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+r^2)^k} r\,dr\,d\theta = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+r^2)^k} r\,dr.$$

Vi gjør substitusjonen $u = 1 + r^2$, $du = 2r\,dr$, som gir at

$$I = \pi \int_1^{\infty} \frac{1}{u^k}\,du.$$

Slike p-integraler er beskrevet på side 364 i boka. Vi ender opp med

$$I = \begin{cases} \frac{\pi}{k-1}, & k > 1, \\ \infty, & k \leq 1. \end{cases}$$

9 Exercise 14.5.7

Vi har at $\iiint_R xy\,dV = 0$, siden integranden er odde og integrasjonsområdet er symmetrisk om origo. Det følger at

$$\begin{aligned} I &= \iiint_R (xy + z^2)\,dV \\ &= \iiint_R z^2\,dV \\ &= 4\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z^2\,dz\,dy\,dx, \end{aligned}$$

der faktoren 4 kommer fra at vi utnytter symmetrien til å kun integrere over den delen av integrasjonsområdet som ligger i første kvadrant. Grensene er funnet ved å først se på området x kan variere over, deretter hvilket område y kan variere over når

x er fiksert, og til slutt hvilket område z kan variere over når x og y er fikserte.

$$\begin{aligned} I &= \frac{4}{3}\int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)^3 \, dy \, dx \\ &= \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)\int_0^1 \left[(1-x-y)^4\right]_0^{1-x} dx \\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 (1-x)^4 \, dx \\ &= \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

$\boxed{10}$ **Exercise 14.5.15**

Vi skal evaluere integralet

$$I = \iiint_T x \, dV,$$

hvor T er tetraederet avgrenset av planene $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, og $x + y + z = 2$.

Vi kan skrive T om til $0 \leq x \leq 1$, $1 - x \leq y \leq 1$, og $2 - x - y \leq z \leq 1$. Merk at området er symmetrisk i x, y, z, så andre valg er også gyldige.

Dette gir

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_{1-x}^1 \int_{2-x-y}^1 x \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \int_{1-x}^1 [x]_{2-x-y}^1 \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \int_{1-x}^1 x(x+y-1) \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 x\left[xy + \frac{1}{2}y^2 - y\right]_{1-x}^1 dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 x\left((1-x)^2 + 2x - 1\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 x^3 \, dx \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$\boxed{11}$ **Exercise 14.6.1**

Integrasjonsområdet er snittet av en kule og en kjegle, og kuler og kjegler beskrives enklest i kulekoordinater. I kulekoordinater er integrasjonsområdet gitt ved $0 \leq R \leq |a|$, $0 \leq \phi \leq \pi/4$. Ved å bruke formelen for volumelement i kulekoordinater,

$dV = R^2 \sin(\phi)\, dR\, d\phi\, d\theta$, finner vi at volumet er

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\pi/4} \int_0^{|a|} \int_0^{2\pi} R^2 \sin(\phi)\, d\theta\, dR\, d\phi \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/4} \int_0^{|a|} R^2 \sin(\phi)\, dR\, d\phi \\ &= \frac{2\pi|a|^3}{3} \int_0^{\pi/4} \sin(\phi)\, d\phi \\ &= \frac{\pi|a|^3}{3} \left(2 - \sqrt{2}\right). \end{aligned}$$

$\boxed{12}$ **Exercise 14.6.13**

I denne oppgaven er det på grunn av symmetrien enklest å bruke kulekoordinater, og vanskeligheten i å bestemme integrasjonsområdet $\mathbf{R}$ i disse koordinatene er kun å finne riktig vinkel ϕ; det er klart at vi må integrere over $0 \leq r \leq a$ og $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Vi ser at nedre grense for ϕ må være 0, så da gjenstår øvre grense. For å finne denne, ser vi bruker vi koordinattransformasjonsformelen direkte:

$$\tan\phi = \frac{r}{z} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{c\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{c},$$

dermed har vi $0 \leq \phi \leq \arctan\frac{1}{c}$.

Vi husker også at volumelementet i kulekoordinater er $dV = R^2 \sin\phi\, dR\, d\phi\, d\theta$, samt $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Dermed kan vi evaluere integralet:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\mathbf{R}} \left(x^2+y^2+z^2\right) dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\arctan\frac{1}{c}} \int_0^a R^2 R^2 \sin\phi\, dR\, d\phi\, d\theta \\ &= 2\pi \left(\int_0^{\arctan\frac{1}{c}} \sin\phi\, d\phi \right) \left(\int_0^a R^4\, dR \right) \\ &= \frac{2\pi a^5}{5} \left[-\cos\phi\right]_0^{\arctan\frac{1}{c}} \\ &= \frac{2\pi a^5}{5} \left(1 - \cos\arctan\frac{1}{c}\right) = \frac{2\pi a^5}{5} \left(1 - \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\right). \end{aligned}$$

Den siste likheten kan vises ved å tegne en passende trekant.