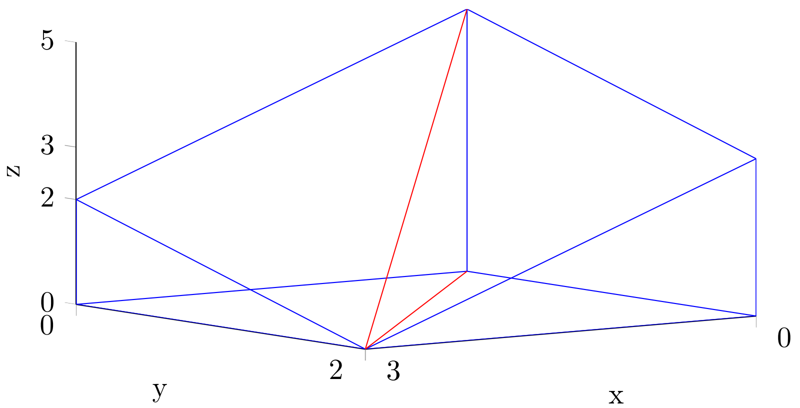
Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

# TMA4105 Matematikk 2
## Vår 2015

**Løsningsforslag — Øving 8**

Alle oppgavenummer referer til **8. utgave** av **Adams & Essex' Calculus: A Complete Course**.

### 5 Exercise 14.1.6




Figur 1: Volumet vi er ute etter ligger innenfor de blå linjene. Planet som de røde linjene ligger i deler volumet opp i to pyramider.

Integralet svarer til volumet som ligger over rektangelet $D$ og under planet $z = 5-x-y$. Figur 1 viser hvordan vi kan dele opp volumet i to pyramider. Disse vil ha grunnflate i $xz$- og $yz$-planet, med "toppen" i punktet $(3, 2, 0)$. Vi finner derfor

$$\begin{aligned}\iint_D (5-x-y)\,dA &= \frac{1}{3}\cdot 2\cdot\left(3\cdot\frac{2+5}{2}\right) + \frac{1}{3}\cdot 3\cdot\left(2\cdot\frac{3+5}{2}\right)\\ &= 7+8\\ &= 15,\end{aligned}$$

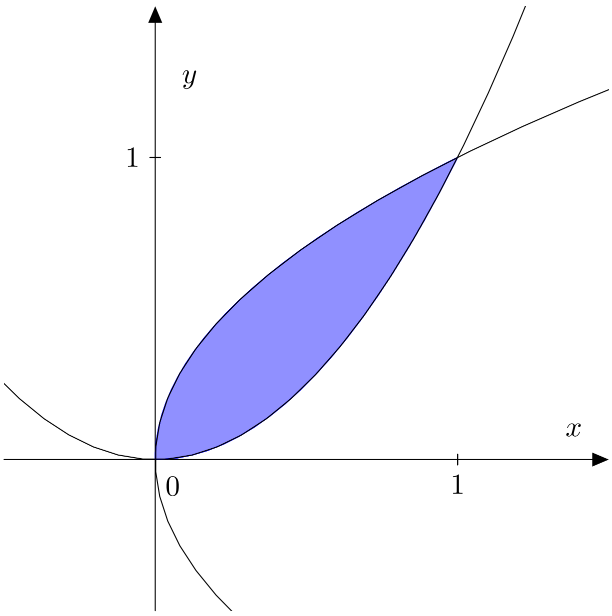
der det første leddet svarer til pyramiden til venstre i figuren, mens det andre svarer til pyramiden til høyre.

### 6 Exercise 14.2.3

Integrasjonen i denne oppgaven er relativt rett frem. Vi integrerer først med hensyn på $y$, og så med hensyn på $x$, og ender opp med

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \int_{-x}^{x} \cos(y)\,dy\,dx &= \int_0^\pi [\sin(y)]_{-x}^{x}\,dx \\ &= \int_0^\pi 2\sin(x)\,dx \\ &= [-2\cos(x)]_0^\pi \\ &= 4.\end{aligned}$$

$\boxed{7}$ **Exercise 14.2.9**




Figur 2: Det fargede området er det som ligger mellom de to kurvene.

Det første vi må gjøre er å finne skjæringspunktene mellom de to kurvene. Ved å sette likningen $y = x^2$ inn i likningen $x = y^2$ får vi likningen $x = x^4$, eller $x(1 - x^3) = 0$. Denne har løsningene $x = 0$ og $x = 1$, som svarer til henholdsvis $y = 0$ og $y = 1$. Skjæringspunktene er derfor $(0, 0)$ og $(1, 1)$. Vi vet også at $x^2 \leq \sqrt{x}$ for $0 \leq x \leq 1$ (se Figur 2), slik at

$$R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$

Vi finner derfor

$$\begin{aligned}\iint_R xy^2\,dA &= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy^2\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 x\left[\frac{1}{3}y^3\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx \\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 (x^{5/2} - x^7)\,dx \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{2}{7}x^{7/2} - \frac{1}{8}x^8\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{2}{7} - \frac{1}{8}\right] \\ &= \frac{3}{56}.\end{aligned}$$

## $\boxed{8}$ Exercise 14.2.26

Hypotenusen i den rettvinklede trekanten kan beskrives ved hjelp av likningen $y = b - \frac{b}{a}x = b\left(1 - \frac{x}{a}\right)$. Volumet er derfor gitt ved integralet

$$V = \int_0^a \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} \left(2 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) dy\,dx.$$

Det innerste integralet blir

$$\begin{aligned}\left[\left(2 - \frac{x}{a}\right)y - \frac{1}{2b}y^2\right]_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} &= b\left(2 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{x}{a}\right) - \frac{b}{2}\left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 \\ &= \frac{b}{2}\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(2\left(2 - \frac{x}{a}\right) - \left(1 - \frac{x}{a}\right)\right) \\ &= \frac{b}{2}\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(3 - \frac{x}{a}\right) \\ &= \frac{b}{2}\left(3 - \frac{4}{a}x + \frac{1}{a^2}x^2\right),\end{aligned}$$

slik at

$$\begin{aligned}V &= \frac{b}{2}\int_0^a \left(3 - \frac{4}{a}x + \frac{1}{a^2}x^2\right) dx \\ &= \frac{b}{2}\left[3x - \frac{2}{a}x^2 + \frac{1}{3a^2}x^3\right]_0^a \\ &= \frac{b}{2}\left[3a - 2a + \frac{1}{3}a\right] \\ &= \frac{2}{3}ab.\end{aligned}$$

## $\boxed{9}$ Exercise 16.3.1

La $R$ være halv-disken innenfor $C$. Da sier Greens teorem at

$$\begin{aligned}
\oint_C \left((\sin(x) + 3y^2)\,dx + (2x - e^{-y^2})\,dy\right) &= \iint_R \left(\frac{\partial(2x - e^{-y^2})}{\partial x} - \frac{\partial(\sin(x) + 3y^2)}{\partial y}\right) dA \\
&= \iint_R (2 - 6y)\,dA \\
&= 2\iint_R dA - 6\iint_R y\,dA \\
&= \pi a^2 - 6\iint_R y\,dA,
\end{aligned}$$

hvor vi på siste linje har benyttet at vi kjenner arealet til halv-disken. Siden $R = \{(x, y) : -a \le x \le a, 0 \le y \le \sqrt{a^2 - x^2}\}$ kan vi beregne det andre integralet ved hjelp av et iterert integral. Vi får

$$\begin{aligned}
\oint_C \left((\sin(x) + 3y^2)\,dx + (2x - e^{-y^2})\,dy\right) &= \pi a^2 - 6\int_{-a}^{a}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} y\,dy\,dx \\
&= \pi a^2 - 3\int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)\,dx \\
&= \pi a^2 - 6(a^3 - \frac{1}{3}a^3) \\
&= \pi a^2 - 4a^3.
\end{aligned}$$

## 10 Exercise 16.3.9

La $D_r$ være disken innenfor $C_r$, og la $(x_0, y_0)$ være midtpunktet til $D_r$. Det vi ønsker å vise er at funksjonen $v$ definert ved

$$v(r) = \frac{1}{2\pi r}\oint_{C_r} u\,ds$$

er konstant lik $u(x_0, y_0)$. Det deles på $2\pi r$ fordi dette er lengden til kurven $C_r$, slik at $v$ gir gjennomsnittsverdien til $u$ på kurven. For å kunne derivere $v$ må vi skrive integralet om på en slik måte at avhengigheten av $r$ blir mer eksplisitt. Siden kurven $C_r$ kan parametriseres som

$$\mathbf{r}(t) = (x_0, y_0) + r(\cos(t), \sin(t)), \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

har vi

$$\begin{aligned}
v(r) &= \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos(t), y_0 + r\sin(t))|\dot{\mathbf{r}}(t)|\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos(t), y_0 + r\sin(t))\,dt.
\end{aligned}$$

Derfor er

$$\begin{aligned}
v'(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{r}(t))\cos(t) + \frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{r}(t))\sin(t)\right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \nabla u(\mathbf{r}(t)) \cdot \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r}(t))\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi r}\oint_{C_r} \nabla u \cdot \hat{\mathbf{N}}\,ds,
\end{aligned}$$

hvor $\hat{\mathbf{N}}$ er den utoverpekende enhetsnormalvektoren på $C_r$. I siste linje gikk vi tilbake til et linjeintegral igjen. Nå kan vi bruke divergensteoremet til å konkludere at

$$\begin{aligned} v'(r) &= \frac{1}{2\pi r}\iint_{D_r} \nabla\cdot\nabla u\,dA \\ &= \frac{1}{2\pi r}\iint_{D_r} \Delta u\,dA \\ &= 0, \end{aligned}$$

siden $\Delta u = 0$. Dermed er $v$ konstant. Spesielt er

$$\begin{aligned} v(r) &= \lim_{\rho\to 0} v(\rho) \\ &= u(x_0, y_0), \end{aligned}$$

hvor vi brukt at gjennomsnittsverdien på kurven vil gå mot verdien i $(x_0, y_0)$ når radien går mot null (dette er oppgitt i oppgaven). Dette var det vi skulle vise.

**Ekstra for de som er interesserte:** Det kan nevnes at vi kan gå den andre veien også (for kontinuerlige funksjoner). Dersom en funksjon oppfyller denne egenskapen i alle punkter er den harmonisk. Dette er kanskje mer overraskende.

La oss også bevise påstanden om at grensen av gjennomsnittsverdien blir verdien i midtpunktet. La derfor $\varepsilon > 0$. Vi har (hvorfor kan vi flytte $u(x_0, y_0)$ inn i integralet?)

$$\begin{aligned} |v(r) - u(x_0, y_0)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\mathbf{r}(t))\,dt - u(x_0, y_0)\right| \\ &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} (u(\mathbf{r}(t)) - u(x_0, y_0))\,dt\right| \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u(\mathbf{r}(t)) - u(x_0, y_0)|\,dt. \end{aligned}$$

Merk nå at $|\mathbf{r}(t) - (x_0, y_0)| = r$ for $t \in [0, 2\pi]$. Siden $u$ er kontinuerlig i $(x_0, y_0)$ kan vi velge $\delta > 0$ slik at dersom $r < \delta$ har vi $|u(\mathbf{r}(t)) - u(x_0, y_0)| < \varepsilon$ for alle $t \in [0, 2\pi]$. For slike $r$ har vi da

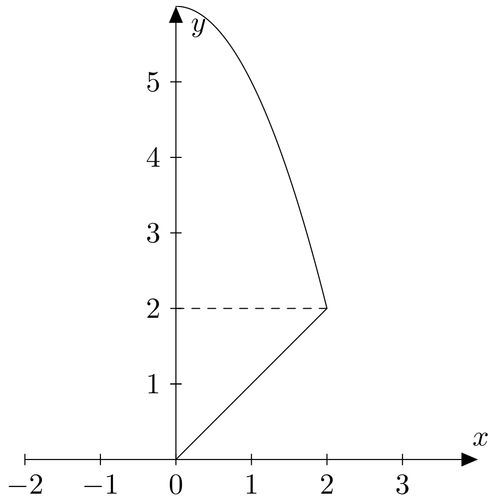
$$\begin{aligned} |v(r) - u(x_0, y_0)| &\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varepsilon\,dt. \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

og vi har derfor at $\lim_{r\to 0} v(r) = u(x_0, y_0)$ siden $\varepsilon$ var vilkårlig.

## 11 Chapter Review 14.6

Det første vi gjør er å skissere området som det integreres over. Området under den stiplede linjen i Figur 3 svarer til det første integralet, mens området over den stiplede linjen svarer til det andre integralet. Merk at $x = \sqrt{6-y}$ er ekvivalent med $y = 6 - x^2$ for $x \ge 0$. Vi ser av figuren at området er gitt ved

$$0 \le x \le 2, \quad x \le y \le 6 - x^2,$$




Figur 3: Integrasjonsområdet i oppgaven.

slik at

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^2 \int_0^y f(x,y)\,dx\,dy + \int_2^6 \int_0^{\sqrt{6-y}} f(x,y)\,dx\,dy \\
&= \int_0^2 \int_x^{6-x^2} f(x,y)\,dy\,dx.
\end{aligned}
$$

## 12 Chapter Review 16.10

La $R$ være området som ligger innenfor $C$. Sirkulasjonen til $\mathbf{F}$ rundt $C$ er per definisjon gitt ved integralet

$$
\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_C \left((2y^3 - 3y + xy^2)\,dx + (x - x^3 + x^2y)\,dy\right),
$$

som er lik

$$
\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \iint_R \left( \frac{\partial(x - x^3 + x^2y)}{\partial x} - \frac{\partial(2y^3 - 3y + xy^2)}{\partial y} \right) dA \\
&= \iint_R \big((1 - 3x^2 + 2xy) - (6y^2 - 3 + 2xy)\big)\,dA \\
&= \iint_R \left(4 - 3x^2 - 6y^2\right) dA
\end{aligned}
$$

fra Greens teorem. Vi ønsker at sirkulasjonen, og derfor dette dobbeltintegralet, skal være størst mulig. Dette oppnås ved å velge $R$ til å være området der integranden er positiv, altså der $4 - 3x^2 - 6y^2 > 0$. Den største mulige sirkulasjonen får vi derfor når $C$ er ellipsen som oppfyller $4 - 3x^2 - 6y^2 = 0$.