Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 7

Alle oppgavenummer refererer til **8. utgave** av **Adams & Essex' Calculus: A Complete Course**.

5 Exercise 15.2.5

Vi regner først ut de nødvendige partiellderiverte for å se om vektorfeltet er konservativt.

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = -2z, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x,$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = 2y, \quad \frac{\partial F_3}{\partial x} = -2x, \quad \frac{\partial F_3}{\partial y} = 2y,$$

fra dette ser vi at

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

Siden alle disse er like, har vi med et konservativt vektorfelt å gjøre.

Ved inspeksjon ser vi at

$$\phi(x,y,z) = x^2y + y^2z - z^2x,$$

er en mulig potensialfunksjon.

6 Exercise 15.2.9

Vi søker en potensialfunksjon ϕ slik at

$$\nabla\phi(x,y,z) = \frac{2x}{z}\mathbf{i} + \frac{2y}{z}\mathbf{j} - \frac{x^2+y^2}{z^2}\mathbf{k}.$$

Første komponent i denne vektorligningen er $\phi_x(x,y,z) = 2x/z$, som gir at

$$\phi(x,y,z) = \frac{x^2}{z} + C(y,z),$$

for en deriverbar funksjon C. Ved å partiellderivere dette uttrykket for ϕ med hensyn på y, kombinert med andre komponent av vektorligningen, gir

$$C_y(y,z) = \frac{2y}{z},$$

som betyr at $C(y,z) = \frac{y^2}{z} + K(z)$, for en deriverbar funksjon K. Vi har nå at $\phi(x,y,z) = \frac{x^2+y^2}{z} + K(z)$. Ved å partiellderivere med hensyn på z får vi

$$-\frac{x^2+y^2}{z^2} + K'(z) = -\frac{x^2+y^2}{z^2},$$

som medfører at K er en konstant. Alt i alt kan vi konkludere med at feltet er konservativt, med potensialfunksjon

$$\phi(x,y,z) = \frac{x^2+y^2}{z} + \text{konstant}.$$

7 Exercise 15.3.2

Den generelle formelen for kurveintegralet av en funksjon med hensyn på kurvelengden er gitt ved

$$\int_{\mathcal{C}} f(\mathbf{r}(t)) \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| ds.$$

I vårt tilfelle er $f(\mathbf{r}(t)) = t$, og

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = |\mathbf{r}'(t)| = |2t\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2t\mathbf{k}| = \sqrt{1+8t^2}.$$

Dermed er integralet vi skal finne

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} y\,ds &= \int_0^m t\sqrt{1+8t^2}\,dt \\
&= \frac{1}{16}\int_{t=0}^m \sqrt{u}\,du = \frac{1}{16}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_{t=0}^m \\
&= \frac{1}{24}\left[\left(1+8t^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^m \\
&= \frac{1}{24}\left(\left(1+8m^2\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right)
\end{aligned}$$

ved substitusjonen $u = 1 + 8t^2$, $du = 16t\,dt$.

8 Exercise 15.3.15

Vi begynner med å parametrisere kurven.

$$(a\cos(t), a\sin(t), a\cos(t)), \qquad 0 \le t \le \pi/2,$$

som fremgår ved først å parametrisere en sirkel om origo med radius a i x–y–planet, og så sette $z = x$.

Vi får da

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} x\,ds &= a^2\int_0^{\pi/2} \cos(t)\sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + (-\sin(t))^2}\,dt \\
&= a^2\int_0^{\pi/2} \cos(t)\sqrt{1+\sin^2(t)}\,dt \\
&= a^2\int_0^1 \sqrt{1+v^2}\,dv,
\end{aligned}$$

der vi brukte substitusjonen $v = \sin(t)$. Substitusjonen $v = \sinh(p)$, samt identiteten $1 + \sinh^2(p) = \cosh^2(p)$, gir så

$$\begin{aligned}
a^2 \int_0^1 \sqrt{1+v^2}\, dv &= a^2 \int_0^{\sinh^{-1}(1)} \cosh^2(p)\, dp \\
&= a^2 \left[\frac{1}{2}\cosh(x)\sinh(x) + \frac{1}{2}x\right]_0^{\sinh^{-1}(1)} \\
&= \frac{a^2}{2}\left(\sqrt{2} + \sinh^{-1}(1)\right).
\end{aligned}$$

9 Exercise 15.4.6

De tre linjesegmentene kan parametriseres som

$$\begin{aligned}
t\mathbf{i}, &\qquad 0 \le t \le 1, \\
(1,0,0) + s\mathbf{j}, &\qquad 0 \le s \le 1, \\
(1,1,0) + r\mathbf{k}, &\qquad 0 \le r \le 1.
\end{aligned}$$

Kall kurven bestående av disse tre linjesegmentene $\mathcal{C}$. Flyten av F langs $\mathcal{C}$ er da gitt ved

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 (t\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - t\mathbf{k}) \cdot \mathbf{i}\, dt \\
&+ \int_0^1 (\mathbf{i} + s\mathbf{j} - (1+s)\mathbf{k}) \cdot \mathbf{j}\, ds \\
&+ \int_0^1 (2\mathbf{i} + (1-r)\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}\, dr \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2 = -1.
\end{aligned}$$

En alternativ løsning er å observere at feltet er konservativt,

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \nabla\left(\frac{x^2+y^2}{2} - xz - yz\right),$$

for så å ta differansen av verdiene til denne potensialfunksjonen i endepunktene av kurven beskrevet over.

10 Exercise 15.4.17

Vi begynner med å velge en parametrisering av integrasjonskurven $\mathcal{C}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1: &\quad t\mathbf{i} + 0\mathbf{j}, &\qquad -a \le t \le a \\
\mathcal{C}_2: &\quad a\cos s\mathbf{i} + a\sin s\mathbf{j} &\qquad 0 \le s \le \pi,
\end{aligned}$$

merk at dette gir den korrekte orienteringen, *mot klokka*. Begge integralene vi skal finne er da er summen av bidragene fra hver av disse to delene av kurven.

a) Vi regner ut integralet direkte

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}} x\,dy &= \int_{\mathcal{C}_1} x\,dy + \int_{\mathcal{C}_2} x\,dy \\ &= \int_{-a}^{a} t\,d0 + \int_0^{\pi} a\cos s\,d(a\sin s) \\ &= 0 + \int_0^{\pi} (a\cos s)(a\cos s)\,ds \\ &= a^2\left[\frac{1}{2}s + \frac{1}{4}\sin 2s\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{\pi a^2}{2}.\end{aligned}$$

b) Tilsvarende har vi

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}} y\,dx &= \int_{\mathcal{C}_1} y\,dx + \int_{\mathcal{C}_2} y\,dx \\ &= \int_{-a}^{a} 0\,dt + \int_0^{\pi} a\sin s\,d(a\cos s) \\ &= 0 + \int_0^{\pi} (a\sin s)(-a\sin s)\,ds \\ &= -a^2\left[\frac{1}{2}s - \frac{1}{4}\sin 2s\right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{\pi a^2}{2}.\end{aligned}$$

Merk: Oppgave 15.4.20 hinter til hvorfor summen av disse integralene er 0.

11 **Review exercise 15.4**

Vi skriver delen av planet $1 = x + y + z$ som ligger i første oktant som grafen til $z = g(x, y) = 1 - x - y$ for $0 \le x \le 1$ og $0 \le y \le 1 - x$, og kan dermed bruke følgende formel for å evaluere integralet

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z)dS = \iint_D f(x, y, g(x, y))\sqrt{1 + (g_1(x, y))^2 + (g_2(x, y))^2}\,dx\,dy,$$

hvor $\mathcal{S}$ er flaten beskrevet over, D er området i x−y-planet beskrevet over, $g_1 = -1$, og $g_2 = -1$, se Eksempel 4, side 891 i boken.

Dermed er integralet vi skal regne ut

$$\begin{aligned}I &= \int_0^1 \int_0^{1-x} xy(1 - x - y)\sqrt{3}\,dy\,dx \\ &= \sqrt{3}\int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy^2(1-x) - \frac{1}{3}xy^3\right]_0^{1-x} dx \\ &= \sqrt{3}\int_0^1 \frac{1}{6}x(1-x)^3\,dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6}\left[\frac{1}{20}\left(10x^2 - 20x^3 + 15x^4 - 4x^5\right)\right]_0^1 = \frac{1}{40\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

12 Review Exercise 15.8

Integralet av funksjonen **F** mellom de to punktene er uavhengig av valg av kurve mellom punktene dersom konstantene velges slik at **F** er konservativ, i så fall er verdien av integralet differansen av verdiene til den tilhørende potensialfunksjonen i de aktuelle punktene.

Vi deriverer komponentene av **F** for å finne betingelser på a, b, og c.

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = ax + 3z, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = 3y, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x + 3z,$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = 3x + by^2, \quad \frac{\partial F_3}{\partial x} = by, \quad \frac{\partial F_3}{\partial y} = bx + 3cy^2.$$

Fra dette ser vi at

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

kun dersom $b = 3$, $a = 2$, og $c = 1$.

Vi har dermed funnet at

$$\mathbf{F} = (2xy + 3yz)\mathbf{i} + \left(x^2 + 3xz + 3y^2 z\right)\mathbf{j} + \left(3xy + y^3\right)\mathbf{k}$$

er konservativ. Ved inspeksjon ser vi at

$$\varphi(x, y, z) = x^2 y + 3xyz + y^3 z$$

er en mulig potensialfunksjon.

Kurveintegralet av tangentialkomponenten av **F** langs en vilkårlig kurve $\mathcal{C}$ med endepunktene $p_0 = (0, 1, -1)$ og $p_1 = (2, 1, 1)$ blir dermed

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \varphi(p_1) - \varphi(p_0) = 11 - (-1) = 12.$$