TMA4105 Matematikk 2
Vår 2015

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 6

Alle oppgavenummer referer til **8. utgave** av **Adams & Essex' Calculus: A Complete Course**.

5 Exercise 12.8.4

Definér funksjonen f ved $f(x,y,z) = e^{yz} - x^2 z \ln(y) - \pi$ for $x \in \mathbb{R}, y \in (0,\infty), z \in \mathbb{R}$. Da svarer likningen til $f(x,y,z) = 0$. Anta at (x_0, y_0, z_0) tilfredstiller likningen. Da sier det implisitte funksjonsteorem at det finnes en løsning $y(x,z)$ i en omegn av punktet, så lenge

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = z_0 \left(e^{y_0 x_0} - \frac{x_0^2}{y_0} \right) \neq 0,$$

som er ekvivalent med at

$$z_0 \neq 0 \quad \text{og} \quad y_0 e^{y_0 x_0} \neq x_0^2.$$

For en slik løsning $y(x,z)$ av likningen kan vi derivere likningen

$$f(x, y(x,z), z) = 0$$

med hensyn på z og få

$$\left(\frac{\partial y}{\partial z} z + y \right) e^{yz} - x^2 \ln(y) - x^2 z \frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial z} = 0,$$

eller

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{x^2 y \ln(y) - y^2 e^{yz}}{yz e^{yz} - x^2 z}.$$

6 Exercise 12.8.14

Definér funksjonene f og g ved $f(x,y,r,s) = x - r^2 - 2s$ og $g(x,y,r,s) = y + 2r - s^2$. Da svarer likningene til $f(x,y,r,s) = 0$ og $g(x,y,r,s) = 0$. Vi trenger nå jacobideterminanten

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f,g)}{\partial(r,s)} &= \begin{vmatrix} f_r & f_s \\ g_r & g_s \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -2r & -2 \\ 2 & -2s \end{vmatrix} \\ &= 4(1 + rs). \end{aligned}$$

Det implisitte funksjonsteorem sier nå at det vil finnes en løsning $r(x, y)$, $s(x, y)$ i en omegn av (x_0, y_0, r_0, s_0), der $x_0 = r_0^2 + 2s_0$ og $y_0 = s_0^2 - 2r_0$, så lenge denne determinanten ikke er null, altså når $r_0 s_0 \neq -1$.

Ved å ta gradienten av de to likningene finner vi

$$2r\nabla r + 2\nabla s = (1, 0), \tag{1}$$
$$2s\nabla s - 2\nabla r = (0, 1), \tag{2}$$

som er ekvivalent med

$$\begin{aligned} s \cdot (1) - (2) : \qquad & 2rs\nabla r + 2\nabla r = (s, -1), \\ (1) + r \cdot (2) : \qquad & 2\nabla s + 2rs\nabla s = (1, r). \end{aligned}$$

Dermed har vi

$$\nabla r = \frac{(s, -1)}{2(1 + rs)}, \quad \nabla s = \frac{(1, r)}{2(1 + rs)},$$

eller, skrevet ut,

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{s}{2(1 + rs)}, & \frac{\partial s}{\partial x} &= \frac{1}{2(1 + rs)}, \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= -\frac{1}{2(1 + rs)}, & \frac{\partial s}{\partial y} &= \frac{r}{2(1 + rs)}. \end{aligned}$$

Alternativt kan man regne med differensialer. De to likningene gir

$$\begin{aligned} 2r\,dr + 2\,ds &= dx, \\ -2\,dr + 2s\,ds &= dy. \end{aligned}$$

Dette er et lineært likningssystem for dr og ds, som kan løses (entydig) på samme måte som vi løste Likning (1) og Likning (2). Merk at determinanten til systemet er jacobideterminanten $\partial(f, g)/\partial(r, s)$. Vi ender opp med

$$\begin{aligned} dr &= \frac{s}{2(1 + rs)}\,dx - \frac{1}{2(1 + rs)}\,dy, \\ ds &= \frac{1}{2(1 + rs)}\,dx + \frac{r}{2(1 + rs)}\,dy, \end{aligned}$$

som gir de samme deriverte som vi fant over.

$\boxed{7}$ **Exercise 12.9.1**

Husk at vi har den geometriske rekken

$$\frac{1}{1 - t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n.$$

Dermed får vi

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{1}{2+xy^2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-(-\frac{1}{2}xy^2)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}xy^2\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n y^{2n},
\end{aligned}$$

hvor rekken på siste linje blir taylorrekken til f sentrert i origo.

8 Exercise 12.9.10

I denne oppgaven gjelder det å holde tungen rett i munnen.[1] Ved å bare ta med akkurat så mange ledd som man trenger, kan man spare seg selv for mye arbeid. Dette gjøres ved å kaste bort alt som gir ledd av høyere orden enn 4. Vi vil benytte at

$$\begin{aligned}
\cos(t) &= 1-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{24}t^4+\cdots, \\
\sin(t) &= t-\frac{1}{6}t^3+\cdots,
\end{aligned}$$

som du kjenner fra Matematikk 1.

Ved å bruke uttrykkene over finner vi

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= 1-\frac{1}{2}(x+\sin(y))^2+\frac{1}{24}(x+\sin(y))^3+\cdots \\
&= 1-\frac{1}{2}\left(x+y-\frac{1}{6}y^3+\cdots\right)^2+\frac{1}{24}(x+y+\cdots)^4+\cdots \\
&= 1-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+2xy-\frac{1}{3}xy^3-\frac{1}{3}y^4+\cdots\right) \\
&\qquad\qquad +\frac{1}{24}\left(x^2+2xy+y^2+\cdots\right)^2+\cdots \\
&= 1-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+2xy-\frac{1}{3}xy^3-\frac{1}{3}y^4+\cdots\right) \\
&\quad +\frac{1}{24}\left(x^4+4x^2y^2+y^4+4x^3y+2x^2y^2+4xy^3+\cdots\right)+\cdots
\end{aligned}.$$

Fra dette ser vi at taylorpolynomet til f av grad 4 sentrert i origo er gitt ved

$$P_4(x,y) = 1-\frac{1}{2}x^2-xy-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{6}x^3y+\frac{1}{4}x^2y^2+\frac{1}{3}xy^3+\frac{5}{24}y^4.$$

9 Exercise 12.9.15

[1] Merk at løsningen som står i “Student Solutions Manual” er feil fordi 4! blir til 4.

Definér funksjonen f ved $f(x,y,z) = x + 2y + z + e^{2z} - 1$. Da svarer likningen til $f(x,y,z) = 0$, hvor vi umiddelbart ser at origo er en løsning. Siden

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = 3 \neq 0$$

har likningen en løsning $z(x,y)$ i en omegn av origo.

Tar man partiellderiverte av likningen $f(x,y,z(x,y)) = 0$ finner man

$$\begin{aligned} 1 + z_x + 2z_x e^{2z} &= 0, \\ 2 + z_y + 2z_y e^{2z} &= 0, \\ z_{xx} + 2z_{xx}e^{2z} + 4z_x^2 e^{2z} &= 0, \\ z_{yy} + 2z_{yy}e^{2z} + 4z_y^2 e^{2z} &= 0, \\ z_{xy} + 2z_{xy}e^{2z} + 4z_x z_y e^{2z} &= 0, \end{aligned}$$

slik at vi ved å sette inn $x = y = z = 0$ har (det lønner seg å løse likningene fra topp til bunn)

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = -\frac{1}{3}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = -\frac{2}{3},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0) = -\frac{4}{27}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,0) = -\frac{8}{27}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -\frac{16}{27}.$$

Taylorpolynomet til z av grad 2 sentrert i origo er derfor gitt ved

$$\begin{aligned} P_2(x,y) = {} & f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y \\ & + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)xy + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)y^2 \\ = {} & -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{27}x^2 - \frac{8}{27}xy - \frac{8}{27}y^2. \end{aligned}$$

En alternativ måte å gjøre oppgaven på er å skrive $z(x,y) = P_2(x,y) + O(|(x,y)|^3)$, for deretter å sette dette inn i likningen og dedusere seg frem til koeffisientene i $P_2(x,y)$. For å gjøre dette må man benytte taylorrekken til e^t.

10 Exercise 15.1.3

Siden vektorfeltet er gitt ved $\mathbf{F}(x,y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ må feltlinjene tilfredstille differensiallikningen

$$y' = \frac{x}{y},$$

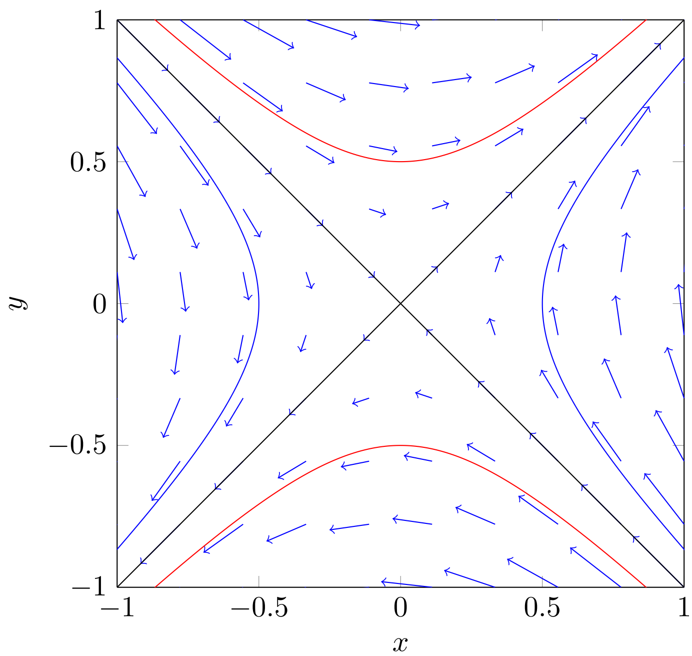
eller

$$\left(\frac{1}{2}y^2\right)' = x.$$

Ved å integrere denne likningen finner vi

$$y^2 - x^2 = c,$$

som beskriver hyperbler sentrert i origo. Det er tre ulike tilfeller å skille mellom: Hvis $c > 0$ ligger brennpunktene på y-aksen, mens de ligger på x-aksen når $c < 0$. Spesialtilfellet $c = 0$ svarer til de to linjene $y = \pm x$. Merk også at alle feltlinjene har disse to linjene som asymptoter. Se Figur 1 for $c = \pm 1/4$ og $c = 0$.



Figur 1: Vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ og utvalgte feltlinjer.

11 Chapter Review 12.14

Vi ser først på x og z som funksjoner av y. Ved å derivere likningene finner vi[2]

$$F_x \frac{dx}{dy} + F_y + F_z \frac{dz}{dy} = 0 \tag{3}$$

$$G_x \frac{dx}{dy} + G_y + G_z \frac{dz}{dy} = 0 \tag{4}$$

hvorpå

$$G_z \cdot (3) - F_z \cdot (4): \quad (F_x G_z - F_z G_x) \frac{dx}{dy} + F_y G_z - F_z G_y = 0,$$

og derfor

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{F_y G_z - F_z G_y}{F_x G_z - F_z G_x}.$$

Ved å bytte om på rollene til variablene x, y, z finner vi også umiddelbart

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{F_z G_x - F_x G_z}{F_y G_x - F_x G_y} \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{F_x G_y - F_y G_x}{F_z G_y - F_y G_z}.$$

Vi får dermed

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy}\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} &= -\left(\frac{F_y G_z - F_z G_y}{F_x G_z - F_z G_x}\right)\left(\frac{F_z G_x - F_x G_z}{F_y G_x - F_x G_y}\right)\left(\frac{F_x G_y - F_y G_x}{F_z G_y - F_y G_z}\right) \\ &= -(-1)(-1)(-1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

[2]Det er underforstått at de deriverte til F og G er evaluert i $(x(y), y, z(y))$.

Alternativ: Siden hver enkelt variabel entydig bestemmer de to andre variablene må vi ha identiteten

$$x(y(z(x))) = x.$$

Her gjelder det å tolke notasjonen riktig. Hvis vi starter helt innerst på venstre side tas det inn en x-verdi x, og $z(x)$ er z-verdien som korresponderer til denne. På samme måte blir $y(z(x))$ den korresponderende y-verdien. Ved å så ta $x(y(z(x)))$ er vi tilbake til utgangspunktet, som gir høyresiden. Vi kan nå derivere begge sider av likningen, og får

$$\frac{dx}{dy}\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = 1$$

fra kjerneregelen.

12 Chapter Review 15.11

La oss skrive vektorfeltet som $\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$. Målet vårt er dermed å dedusere hva f og g må være for at $\mathbf{F}$ skal oppfylle de gitte kravene.

Det første kravet betyr at feltlinjene oppfyller differensiallikningen

$$y + xy' = 0,$$

men vi vet også at disse må oppfylle

$$y' = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}.$$

Ved å kombinere disse to likningene finner vi

$$g(x, y) = -\frac{y}{x} f(x, y) \tag{5}$$

Krav nummer to gir oss at

$$f(x, y)^2 + g(x, y)^2 = 1,$$

eller, ved å bruke Likning (5), at

$$f(x, y)^2 = \frac{x^2}{x^2 + y^2},$$

for $(x, y) \neq (0, 0)$.

Vi ser nå at dersom vi velger (husk Likning (5))

$$f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad g(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

så er alle kravene oppfylt.