Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 5

Alle oppgavenummer refererer til **8. utgave** av **Adams & Essex' Calculus: A Complete Course**.

4 Exercise 12.5.2

Vi ønsker å partiellderivere $f(x, y, z)$ med hensyn på t, når $x = g(s)$, $y = h(s, t)$, og $z = k(t)$. Generelt har vi fra kjerneregelen

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}.$$

I dette tilfellet er $\frac{\partial x}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t}$, og $\frac{\partial z}{\partial t} = k'$.

Vi setter inn dette, og oppnår

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial t} + k'\frac{\partial f}{\partial z}.$$

5 Exercise 12.5.24

Vi vil i denne oppgaven bruke subskriptnotasjonen for partiellderiverte der vi indekserer med variable; for eksempel vil vi ha $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_x(x, y)$. Ved å partiellderivere begge sider av ligningen $r^2 = x^2 + y^2$ med hensyn på x, finner vi at $2rr_x = 2x$. Ved å bruke $x = r\cos\theta$, ser vi at vi må ha

$$r_x = \cos\theta.$$

På tilsvarende vis får vi at

$$r_y = \sin\theta.$$

For å finne $\frac{\partial \theta}{\partial x}$, partiellderiverer vi begge sider av ligningen $x = r\cos\theta$ med hensyn på x. Da får vi

$$\begin{aligned} 1 &= r_x \cos\theta - r\sin(\theta)\theta_x \\ &= \cos^2\theta - r\sin(\theta)\theta_x \\ &= 1 - \sin^2\theta - r\sin(\theta)\theta_x \end{aligned}$$

Ved å løse for θ_x, finner vi[1]

$$\theta_x = -\frac{\sin\theta}{r}.$$

[1] Her deler vi på $\sin\theta$, så utledningen holder bare for punkter som ikke ligger på x-aksen. Men ved å bruke definisjonen av partiellderivert, ser man at formelen er riktig også for de resterende punktene.

Tilsvarende får vi

$$\theta_y = \frac{\cos\theta}{r}.$$

Vi bruker nå disse formlene for å uttrykke $u_{xx} + u_{yy}$. Vi har at

$$u_x = u_r r_x + u_\theta \theta_x$$

og

$$\begin{aligned} u_{xx} &= (u_r r_x + u_\theta \theta_x)_x \\ &= (u_{rr} r_x + u_{r\theta}\theta_x)\, r_x + u_r r_{xx} + (u_{\theta r} r_x + u_{\theta\theta}\theta_x)\,\theta_x + u_\theta \theta_{xx}. \end{aligned}$$

Vi finner også at

$$u_{yy} = (u_{rr} r_y + u_{r\theta}\theta_y)\, r_y + u_r r_{yy} + (u_{\theta r} r_y + u_{\theta\theta}\theta_y)\,\theta_y + u_\theta \theta_{yy}.$$

Derfor er

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} = {} & (r_x^2 + r_y^2) u_{rr} + (2 r_x \theta_x + 2 r_y \theta_y) u_{r\theta} + (\theta_x^2 + \theta_y^2) u_{\theta\theta} \\ & + (r_{xx} + r_{yy}) u_r + (\theta_{xx} + \theta_{yy}) u_\theta \end{aligned}$$

Ved å bruke relasjonen $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ og formlene vi fant ovenfor, ser vi at de tre første parentesene på høyresida er henholdsvis 1, 0 og $1/r^2$. For å finne de to siste parentesene, utfører vi de nødvendige partiellderiveringene:

$$\begin{aligned} r_{xx} &= \frac{\sin^2\theta}{r} & r_{yy} &= \frac{\cos^2\theta}{r} \\ \theta_{xx} &= \frac{2\cos\theta\sin\theta}{r^2} & \theta_{yy} &= -\frac{2\cos\theta\sin\theta}{r^2} \end{aligned}$$

Dette betyr at de er henholdsvis $1/r$ og 0. Alt i alt får vi

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{r} u_r.$$

$\boxed{6}$ Exercise 12.6.4

Vi finner først lineariseringen i punktet $(2,2)$. Vi har at

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= -24 \frac{2x + y}{(x^2 + xy + y^2)^2} \\ f_y(x,y) &= -24 \frac{2y + x}{(x^2 + xy + y^2)^2} \end{aligned}$$

Lineariseringen er derfor

$$\begin{aligned} L(x,y) &= f(2,2) + f_x(2,2)(x-2) + f_y(2,2)(y-2) \\ &= 2 - (x-2) - (y-2), \end{aligned}$$

og vi får approksimasjonen

$$\begin{aligned} f(2{,}1; 1{,}8) \approx L(2,2) &= 2 - 0{,}1 + 0{,}2 \\ &= 2{,}1. \end{aligned}$$

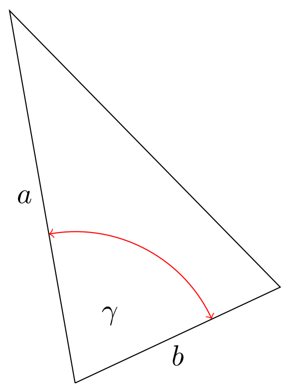
7 Exercise 12.6.14

Vi har oppgitt lengdene a og b til to sider og vinkelen γ mellom disse, og ønsker å finne arealet av den resulterende trekanten, se Figur 1. Én formel for dette er

$$A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma,$$

som med våre mål gir, i kvadratmeter,

$$A = \frac{1}{2}224 \cdot 158 \sin\frac{64\pi}{180} \approx 15905.$$



Figur 1: Trekant med to kjente sider og én vinkel

For å finne prosentvis maksimal feil gitt måleunøyaktighetene, kan vi bruke linearisering av funksjonen i målepunktet, og se på forskjellen

Linearisering nær (a, b, γ) av arealfunksjonen over er gitt ved

$$\begin{aligned} L(x,y,\alpha) = A(a,b,\gamma) &+ \left.\frac{\partial A(x,y,\alpha)}{\partial x}\right|_{(a,b,\gamma)} (x-a) \\ &+ \left.\frac{\partial A(x,y,\alpha)}{\partial y}\right|_{(a,b,\gamma)} (y-b) + \left.\frac{\partial A(x,y,\alpha)}{\partial \alpha}\right|_{(a,b,\gamma)} (\alpha-\gamma). \end{aligned}$$

Med den aktuelle funksjonen får vi

$$L(x,y,\alpha) = \frac{1}{2}\left(ab\sin\gamma + b(x-a)\sin\gamma + a(y-b)\sin\gamma + ab(\alpha-\gamma)\cos\gamma\right).$$

Vi ser av funksjonen at den, i det området vi er interesserte i, øker (og synker) med økende (og synkende) x, y, og α, så det er tilstrekkelig å se på når alle disse tre er enten maksimale eller minimale for å finne prosentvis maksimal feil.

For alle tre minimale får vi

$$L\left(223{,}6; 157{,}6; \frac{62\pi}{180}\right) \approx 15557$$

som gir prosentvis feil

$$\frac{15557 - 15905}{15905} \approx 2{,}2\%$$

For alle tre maksimale får vi

$$L\left(224{,}4; 158{,}4; \frac{66\pi}{180}\right) \approx 16236$$

som gir prosentvis feil

$$\frac{16236 - 15905}{15905} = 2{,}9\%$$

Dermed er maksimal prosentvis feil omtrent 2,9%.

8 Exercise 12.6.18

Vi bruker definisjonen av Jacobi–matrisen, og får

$$D\mathbf{f}(R,\phi,\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial R} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial R} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial R} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\phi\cos\theta & R\cos\phi\cos\theta & -R\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & R\cos\phi\sin\theta & R\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -R\sin\phi & 0 \end{bmatrix}.$$

9 Exercise 12.7.4

Vi har funksjonen gitt ved $f(x,y) = e^{xy}$ og punktet $(2,0)$.

a) Gradienten til en funksjon i to variable er gitt ved

$$\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j},$$

i dette tilfellet

$$\nabla f(x,y) = ye^{xy}\mathbf{i} + xe^{xy}\mathbf{j}.$$

Evaluert i $(2,0)$ får vi dermed

$$\nabla f(2,0) = 2\mathbf{j}.$$

b) Tangentplanet til grafen $z = f(x,y)$ til funksjonen i et gitt punkt står normalt på gradientvektoren i dette punktet, slik at det vil være gitt av likningen

$$z = f(2,0) + \nabla f(2,0) \cdot ((x-2)\mathbf{i} + (y-0)\mathbf{j}),$$

som, ved å gange ut prikkproduktet, gir

$$z - 2y - 1 = 0.$$

c) For å finne likningen for den rette linjen som tangerer nivåkurven[2] finner vi først en likning for nivåkurven som går gjennom punktet vårt. Denne er gitt ved

$$e^{xy} = f(x,y) = f(2,0) = 1,$$

eller

$$xy = 0,$$

som altså er unionen av koordinataksene, og har tangentlinje gjennom $(2,0)$ gitt ved likningen

$$y = 0.$$

[2] Se nederst på side 724 i boka for en forklaring av forskjellen mellom det vi finner i **b)** og **c)**.

10 **Exercise 12.7.14**

Vi har $f(x, y) = \ln |\mathbf{r}|$, hvor $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, og skal finne gradienten til denne.

Vi kan skrive om funksjonen for å gjøre det enklere først:

$$f(x, y) = \ln |\mathbf{r}| = \frac{1}{2} \ln \left(x^2 + y^2\right).$$

Dermed får vi

$$\begin{aligned}
\nabla f(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} \\
&= \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{j} \\
&= \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{x^2 + y^2} \\
&= \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2},
\end{aligned}$$

ved bruk av kjerneregelen.

11 **Review Exercise 12.4**

Vi har funksjonen f definert ved delt forskrift:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{hvis } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{hvis } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Vi undersøker om de første partiellderiverte eksisterer i $(0, 0)$ ved å bruke grenseverdidefinisjonen av de partiellderiverte i $(0, 0)$ direkte.

Vi begynner med den partiellderiverte med hensyn på første argument

$$\begin{aligned}
f_1(0, 0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2+0} - 0}{h} = 1.
\end{aligned}$$

Tilsvarende, for andre argument,

$$\begin{aligned}
f_2(0, 0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{0}{0+h^2} - 0}{h} = 0.
\end{aligned}$$

Grensene eksisterer, dermed har vi funnet $f_1(0, 0)$ og $f_2(0, 0)$.

For å kunne vurdere om de høyereordens partiellderiverte eksisterer i $(0, 0)$, må vi finne de førsteordens partiellderiverte i et vilkårlig punkt $(x, y) \neq (0, 0)$.

For å gjøre dette bruker vi kvotientregelen.

$$\begin{aligned}
f_1(x, y) &= \frac{3x^2 \left(x^2 + y^2\right) - x^3 \cdot 2x}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{x^4 + 3x^2y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \\
f_2(x, y) &= -\frac{2y}{\left(x^2 + y^2\right)^2},
\end{aligned}$$

hvor vi i $(0,0)$ har grenseverdiene beregnet over.

Igjen må vi bruke grenseverdidefinisjonen for å vurdere om $f_{21}(0,0)$ og $f_{12}(0,0)$ eksisterer.

$$\begin{aligned} f_{21}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f_2(0+h,0) - f_2(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{(h^2+0)^2} - 0}{h} = 0, \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} f_{12}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f_1(0,0+h) - f_1(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0+0}{h^4} - 1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{h}, \end{aligned}$$

som ikke eksisterer.