TMA4105 Matematikk 2
Vår 2015

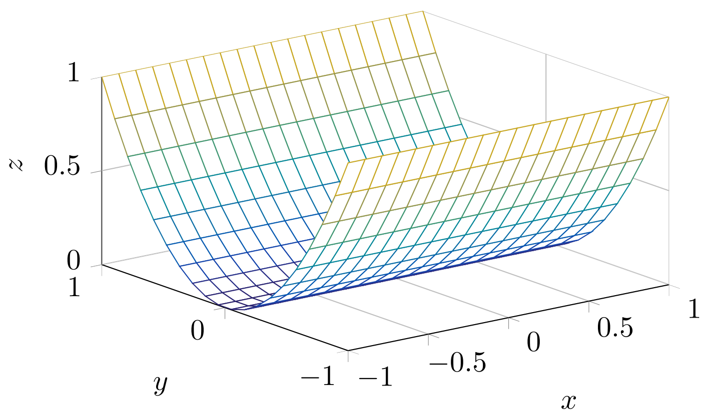
Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 4

Alle oppgavenummer referer til **8. utgave** av **Adams & Essex' Calculus: A Complete Course**.

5 **Exercise 12.1.13**

Når du skisserer grafen er det lurt å utnytte at f ikke avhenger av x. Se Figur 1 under.



Figur 1: Grafen til $f(x, y) = y^2$ for $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$.

6 **Exercise 12.1.40**

Funksjonen f tar bare ikke-negative verdier. Vi ønsker derfor å se på nivåflaten som svarer til $f(x, y, z) = c^2$, der $c \geq 0$. Likningen

$$\frac{x^2 + y^2}{z^2} = c^2$$

kan skrives om til

$$x^2 + y^2 = c^2 z^2,$$

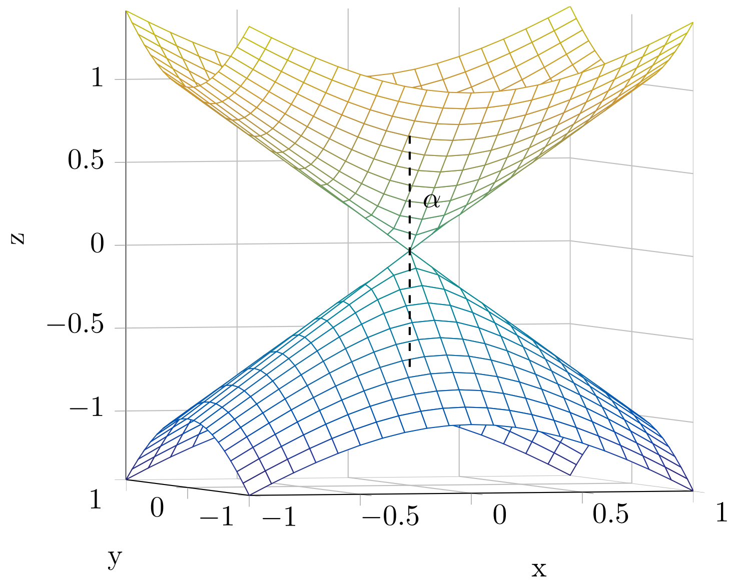
eller

$$r = c|z|$$

i sylinderkoordinater. Nivåflatene er derfor sirkulære kjegler (uten origo, som ikke er i domenet til f) med akse langs z-aksen. Konstanten c bestemmer vinkelen α mellom kjeglen og z-aksen. Nærmere bestemt er denne gitt ved

$$\alpha = \arctan(c).$$

Spesialtilfellet $c = 0$ svarer til en rett linje.



Figur 2: Nivåflaten som svarer til $c = 1$.

7 **Exercise 12.2.6**

Merk at dersom vi fikserer enten $x = 0$ eller $y = 1$ ser vi at eneste mulige kandidat for grensen er 0. Derfor prøver vi å vise at grensen er nettopp dette.

Observer at hvis a og b er to tall har man alltid at

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2),$$

som følger av at $(a-b)^2 \geq 0$. Ved å velge $a = x$ og $b = y - 1$ har vi dermed at

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{x^2(y-1)^2}{x^2 + (y-1)^2} \\ &\leq \frac{1}{4}\frac{(x^2 + (y-1)^2)^2}{x^2 + (y-1)^2} \\ &= \frac{1}{4}(x^2 + (y-1)^2), \end{aligned}$$

som klart går mot 0 når $(x, y) \to (0, 1)$.

(Alternativt kan man for eksempel bruke at $x^2 \leq x^2 + (y-1)^2$, men denne teknikken er verdt å kjenne til).

8 **Exercise 12.2.9**

Det aner oss at grensen ikke eksisterer. Vi prøver derfor å se på hva uttrykket går mot langs ulike linjer på formen $y = ax$ gjennom origo. Vi har

$$\frac{\sin(x(ax))}{x^2 + (ax)^2} = \frac{a}{1 + a^2}\frac{\sin(ax^2)}{ax^2},$$

og dermed

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=ax}} = \frac{a}{1 + a^2},$$

der vi har brukt den velkjente grensen $\lim_{x\to 0} \sin(x)/x = 1$. Siden uttrykket går mot forskjellige verdier (hele intervallet $[-1/2, 1/2]$) avhengig av hvilken linje vi velger eksisterer ikke grensen.

Obs: Om vi ønsker å vise at en grense eksisterer er det *ikke* nok å sjekke at grensene langs hver linje eksisterer og er like!

9 Exercise 12.3.5

Vi ønsker å finne de første ordens deriverte til funksjonen f definert ved $f(x, y) = \arctan(y/x)$. Først finner vi den deriverte med hensyn på x, ved å betrakte y som en konstant. Vi bruker kjerneregelen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) \\ &= -\frac{y}{x^2 + y^2}\end{aligned}$$

Spesielt er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1, 1) = -\frac{1}{2}.$$

På tilsvarende måte finner vi

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{x}{x^2 + y^2},\end{aligned}$$

og

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 1) = -\frac{1}{2}.$$

10 Exercise 12.3.14

Vi finner først de partiellderiverte:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{1 \cdot (x + y) - (x - y) \cdot 1}{(x + y)^2} \\ &= \frac{2y}{(x + y)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -\frac{2x}{(x + y)^2}.\end{aligned}$$

Fra dette finner vi $f_x(1, 1) = 1/2$ og $f_y(1, 2) = -1/2$. Merk også at $f(1, 1) = 0$. Tangentplanet inneholder dermed punktet $(1, 1, 0)$ og har normalvektor $(1, -1, -2)$ (skalert opp for å få heltall). Derfor blir

$$\begin{aligned}((x, y, z) - (1, 1, 0)) \cdot (1, -1, -2) &= 0 \\ x - y - 2z &= 0\end{aligned}$$

likningen til tangentplanet i punktet $(1, 2)$.

Normallinjen går gjennom $(1, 1, 0)$, og har retningsvektor lik normalvektoren til tangentplanet. Den kan derfor parametriseres som

$$(x, y, z) = (1, 1, 0) + t(1, -1, -2), \quad t \in \mathbb{R},$$

eller beskrives ved hjelp av likningene

$$x - 1 = 1 - y = -\frac{z}{2}.$$

11 Exercise 12.4.6

Vi regner først ut den førstederiverte til f med hensyn på x, og finner

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y\cos(xy)}{1 + \sin(xy)},$$

som vi så bruker for å regne ut

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{-y^2\sin(xy)(1 + \sin(xy)) - y^2\cos(xy)^2}{(1 + \sin(xy))^2} \\
&= \frac{-y^2(\sin(xy) + \overbrace{\sin(xy)^2 + \cos(xy)^2}^{=1})}{(1 + \sin(xy))^2} \\
&= -\frac{y^2}{1 + \sin(xy)}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{(\cos(xy) - xy\sin(xy))(1 + \sin(xy)) - xy\cos(xy)^2}{(1 + \sin(xy))^2} \\
&= \frac{(\cos(xy) - xy)(1 + \sin(xy))}{(1 + \sin(xy))^2} \\
&= \frac{\cos(xy) - xy}{1 + \sin(xy)}.
\end{aligned}$$

Vi kan nå spare oss selv arbeid ved å observere at x og y spiller samme rolle i f. Vi kan derfor finne de deriverte med hensyn på y ved å bytte om på x og y over. I tillegg vet vi at $f_{xy} = f_{yx}$ fra Teorem 1 på side 691 i boken. Dermed har vi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{x\cos(xy)}{1 + \sin(xy)}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= -\frac{x^2}{1 + \sin(xy)}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\cos(xy) - xy}{1 + \sin(xy)}.
\end{aligned}$$

12 Chapter Review 12.5

Både telleren og nevneren er kontinuerlige overalt. Funksjonen f er derfor definert og er kontinuerlig utenom når nevneren er null, altså på de to linjene $y = \pm x$. Fra hintet er

$$f(x, y) = \frac{x^2 + xy + y^2}{x + y}$$

der f er definert. Siden telleren ikke er null når $y = -x$ (utenom i origo) viser dette at vi kan utvide f kontinuerlig til linjen $y = x$, men ikke til $y = -x$ (utenom muligens i origo). Se Figur 3.

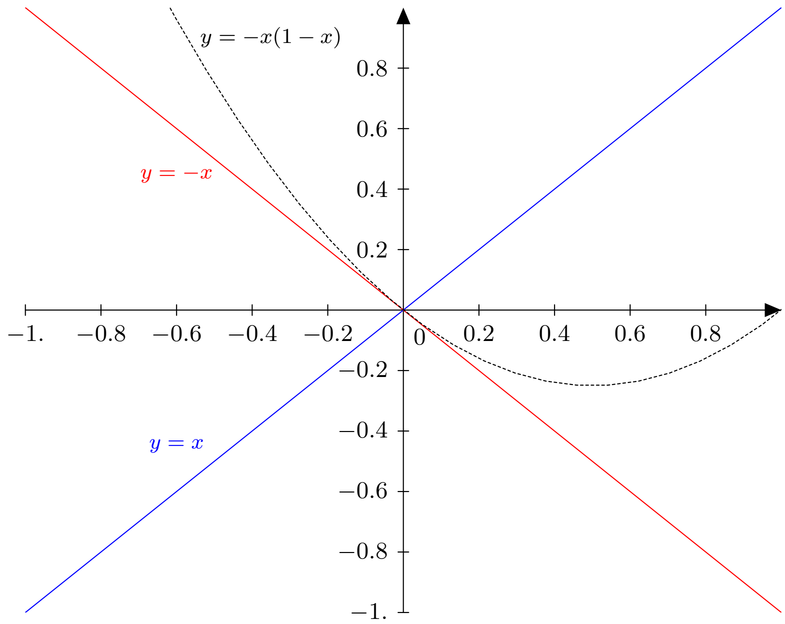
Så hva med origo? Langs linjen $y = x$, etter kontinuerlig utvidelse, har vi

$$f(x, x) = \frac{3}{2}x,$$

slik at hvis $\lim_{(x,y)\to 0} f(x, y)$ skal eksistere, må den være 0. Derimot kan vi i etterhvert omegn av origo finne punkter der $|f(x, y)|$ er vilkårlig stor ved å nærme oss linjen $y = -x$. Derfor kan ikke grensen eksistere, og f er ikke kontinuerlig i origo.

Alternativt kan vi velge en kurve som nærmer seg $y = -x$ samtidig som den nærmer seg origo. En slik kurve er $y = -x(1 - x)$. Vi finner $f(x, -x(1 - x)) = 1 - x + x^2$, som går mot 1, og ikke 0.

Siden $f(x, 0) = x$ for $x \neq 0$ og $f(0, y) = y$ for $y \neq 0$ vil begge de første partiellderiverte eksistere og være lik 1 dersom vi definerer $f(0, 0) = 0$. Partiellderiverte kan derfor eksistere uten at funksjonen er kontinuerlig, noe som ikke var tilfelle i én dimensjon.



Figur 3: Situasjonen i Chapter Review 12.5

13 Chapter Review 12.6

a) Først finner vi at $f(1, -1) = 1$. Vi regner så ut de partiellderiverte

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (2x - 2)f(x, y),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -8yf(x, y),$$

slik at $f_x(1, -1) = 0$ og $f_y(1, -1) = 8$. Planet skal derfor inneholde punktet

$(1, -1, 1)$ og ha normalvektor $(0, 8, -1)$. Dermed blir

$$((x, y, z) - (1, -1, 1)) \cdot (0, 8, -1) = 0$$
$$8y - z = -9$$

likningen til tangentplanet.

b) For å gjøre uttrykkene penere ser vi på nivåkurvene som svarer til $z = e^{c+4}$ (hvorfor taper vi ingenting på dette?). Ved å ta logaritmen av likningen

$$e^{x^2-2x-4y^2+5} = e^{c+4}$$

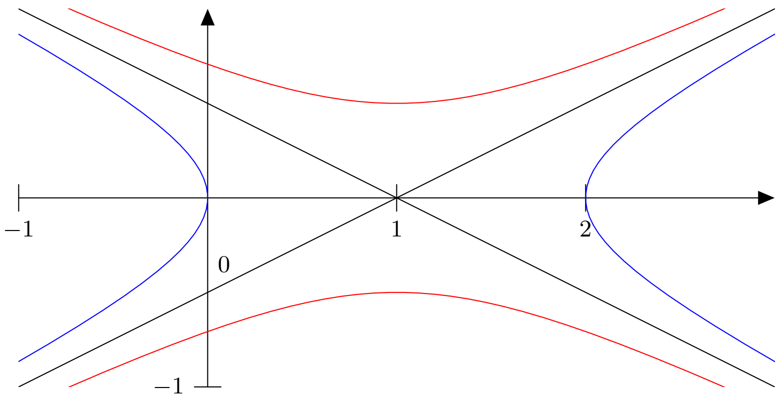
ender vi opp med

$$x^2 - 2x - 4y^2 + 5 = c + 4,$$

som kan skrives som

$$(x - 1)^2 - 4y^2 = c.$$

Denne likningen beskriver hyperbler sentrert i $(1, 0)$. Vi deler nå inn i tre forskjellige tilfeller: Hvis $c > 0$ ligger brennpunktene på x-aksen, mens når $c < 0$ ligger de på linjen $x = 1$. Spesialtilfellet $c = 0$ svarer til de to linjene $y = \pm\frac{1}{2}(x - 1)$. Se Figur 4.



Figur 4: Nivåkurvene som svarer til $c = -1$ (rød), $c = 0$ (svart) og $c = 1$ (blå).