Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 2

Alle oppgavenummer referer til **8. utgave** av **Adams & Essex' Calculus: A Complete Course**.

5 Exercise 8.5.3

Ved å multiplisere opp likningen med nevneren på høyre side får vi

$$3r\sin(\theta) - 4r\cos(\theta) = 5,$$

slik at likningen blir

$$3y - 4x = 5$$

i kartesiske koordinater. Dette er en rett linje.

6 Exercise 8.5.8

Fremgangsmåten likner på den som ble brukt i forrige oppgave. Ved å kvadrere likningen får vi

$$r^2 = \frac{4}{\cos(\theta)^2 + 4\sin(\theta)^2}.$$

Multipliserer vi nå med nevneren finner vi

$$(r\cos(\theta))^2 + 4(r\sin(\theta))^2 = 4,$$

eller

$$x^2 + 4y^2 = 4$$

i kartesiske koordinater. Siden dette kan skrives som

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{1}\right)^2 = 1$$

beskriver dette en ellipse sentrert i origo, med halvakser på 2 og 1.

7 Exercise 8.5.30

a) Definer $f(\theta) = \cos(n\theta)$. Da har f maksima når $\theta = m(2\pi/n)$ for $m \in \mathbb{Z}$. Det er n slike maksima i hver periode, f.eks. i vinklene

$$0 \cdot \frac{2\pi}{n},\ 1 \cdot \frac{2\pi}{n},\ \dots\ ,\ (n-1) \cdot \frac{2\pi}{n},$$

og disse gir opphav til n blader.

I tillegg har f også minima når $\theta = (k + 1/2)(2\pi/n)$ for $k \in \mathbb{Z}$. Det er igjen n slike i hver periode, *men* de gir ikke alltid opphav til nye blader. Siden radien $r = f(\theta)$ er negativ vil disse minimaene svare til blader på motsatt side av origo, altså i vinklene

$$\left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{n} + \pi = \left(k + \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{n}.$$

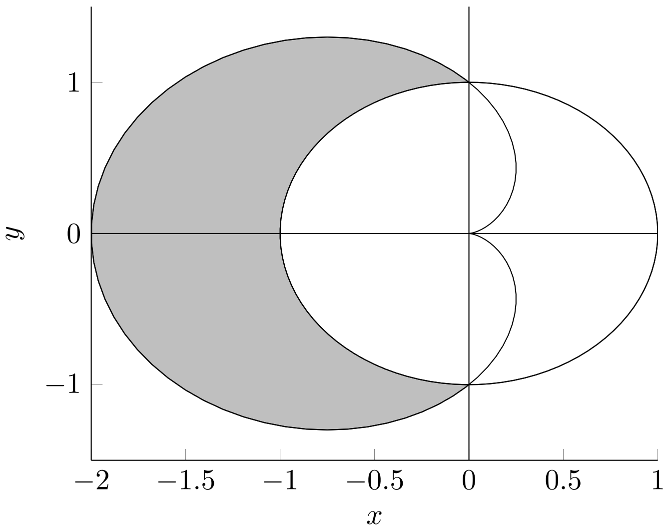
Hvis n er like vil disse være forskjellige fra de som svarer til maksima, slik at vi får totalt $2n$ blader. Hvis derimot n er odde får vi ingen nye blader (siden $k + n/2 + 1/2$ er et heltall), slik at det er totalt n blader.

b) Denne gangen er det bare maksima for f som gir blader, da negativ høyreside ikke gir noen løsninger. Hvert maksima gir opphav til ett blad svarende til den positive løsningen av $r^2 = 1$ (totalt n blader), og potensielt ett blad svarende til den negative løsningen. Den negative løsningen svarer til et blad i

$$m\frac{2\pi}{n} + \pi = \left(m + \frac{n}{2}\right)\frac{2\pi}{n}.$$

Hvis n er like gir disse de samme bladene som fra de positive løsningene (siden $m + n/2$ er et heltall), og vi får totalt n blader. Hvis derimot n er odde får vi n nye blader, og derfor totalt $2n$ blader.

$\boxed{8}$ **Exercise 8.6.7**



Likningen $1 - \cos(\theta) = 1$ er ekvivalent med $\cos(\theta) = 0$. De to kurvene skjærer derfor hverandre i punktene $[1, \pi/2] = (0, 1)$ og $[1, 3\pi/2] = (0, -1)$. Siden området vi er ute etter er symmetrisk om x-aksen finner vi

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} ((1 - \cos(\theta))^2 - 1^2)\, d\theta \\ &= \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\frac{1 + \cos(2\theta)}{2} - 2\cos(\theta)\right) d\theta \\ &= \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin(4\theta) - 2\sin(\theta)\right]_{\pi/2}^{\pi} \\ &= 2 + \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

der identiteten $\cos(\theta)^2 = (1 + \cos(2\theta))/2$ er brukt.

9 **Exercise 8.6.12**

Her er det bare å sette inn i formelen. Siden $f(\theta) = \theta^2$ har vi

$$\begin{aligned} s &= \int_0^\pi \sqrt{(2\theta)^2 + (\theta^2)^2}\, d\theta \\ &= \int_0^\pi \theta\sqrt{4+\theta^2}\, d\theta. \end{aligned}$$

Hvis vi nå benytter substitusjonen $u = 4 + \theta^2$ finner vi

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2}\int_4^{4+\pi^2} u^{1/2}\, d\theta \\ &= \frac{1}{3}\left((4+\pi^2)^{3/2} - 8\right). \end{aligned}$$

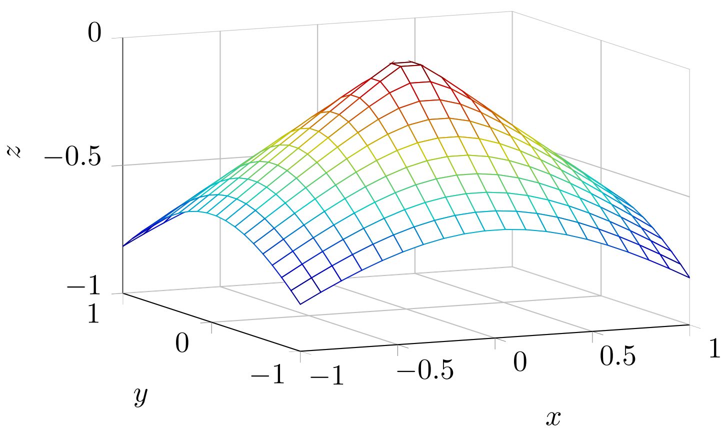
10 **Exercise 10.5.5**

Her har vi

$$\begin{aligned} z &= x^2 + 2y^2 \\ &= \left(\frac{x}{1}\right)^2 + \left(\frac{y}{1/\sqrt{2}}\right)^2, \end{aligned}$$

slik at dette er en elliptisk paraboloide sentrert i origo. Når man skal skissere flaten kan det være nyttig å observere at skjæringene med hvert plan $z = h$ (der $h > 0$) er ellipser med halvakser på $\sqrt{h}$ og $\sqrt{h/2}$.

11 **Exercise 10.6.6**



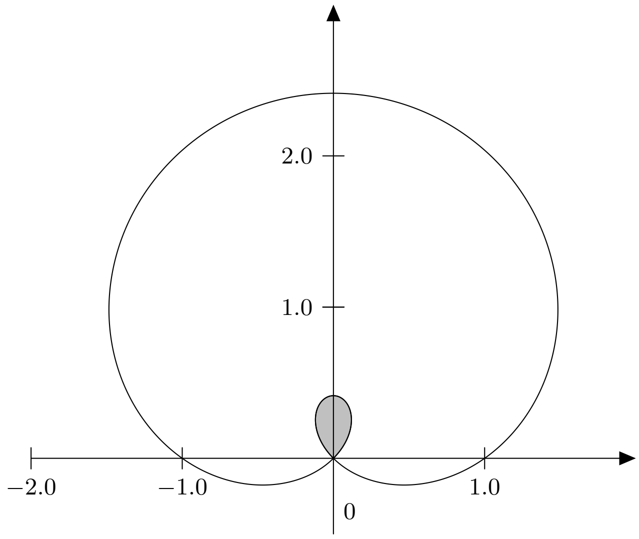
Siden det er ϕ som holdes konstant, beskriver likningen $\phi = 2\pi/3$ en kjegle (uten indre). Hvis vi ønsker å beskrive den i kartesiske koordinater (ikke en del av oppgaven) kan vi observere at

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}R\cos(\theta), \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}R\sin(\theta), \quad z = -\frac{1}{2}R,$$

på flaten, og derfor at

$$z = -\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2 + y^2}.$$

12 Chapter Review 8.27



Likningen $1 + \sqrt{2}\sin(\theta) = 0$, som gir oss vinklene der kurven går gjennom origo, har løsningene $\theta = 5\pi/4$ og $\theta = 7\pi/4$ på intervallet $[0, 2\pi)$. Den store sløyfen svarer til $\theta \in (-\pi/4, 5\pi/4)$, mens den lille sløyfen svarer til $\theta \in (5\pi/4, 7\pi/4)$ (hvor r er negativ). Arealet vi er ute etter blir derfor

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_{5\pi/4}^{7\pi/4} (1 + \sqrt{2}\sin(\theta))^2\, d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_{5\pi/4}^{7\pi/4} \Big(1 + 2\sqrt{2}\sin(\theta) + 1 - \cos(2\theta)\Big)\, d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left[2\theta - 2\sqrt{2}\cos(\theta) - \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_{5\pi/4}^{7\pi/4} \\ &= \frac{\pi - 3}{2}. \end{aligned}$$

13 Chapter Review 10.16

Hver av de to likningene

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 1, \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

beskriver et plan. To plan vil enten

1. skjære hverandre i en rett linje,
2. være like, eller
3. ha tomt snitt (når de er parallelle, men ikke like).

Hvis vi trekker den andre likningen fra den første ender vi opp med $z = 1$. Derfor er likningene ekvivalente med

$$\begin{aligned} z &= 1, \\ x + y &= -1, \end{aligned}$$

som beskriver en rett linje (altså den første situasjonen). Setter vi $x = t$ ser vi at vi kan parametrisere linjen som

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (t, -1 - t, 1) \\ &= (0, -1, 1) + t(1, -1, 0) \end{aligned}$$

for $t \in \mathbb{R}$.