TMA4105 Matematikk 2
Vår 2015

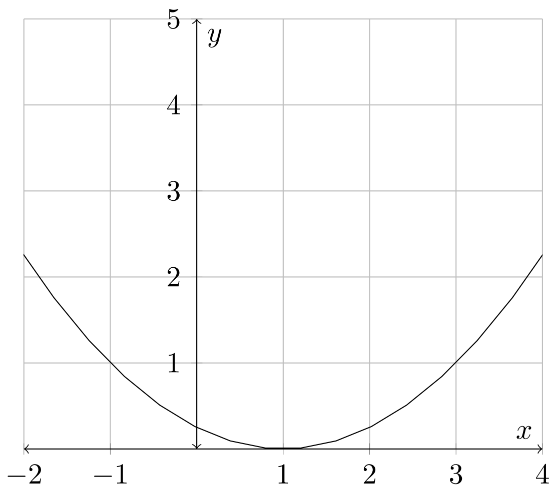
Løsningsforslag — Øving 1

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Alle oppgavenummer refererer til **8. utgave** av **Adams & Essex' Calculus: A Complete Course**.

5 Exercise 8.2.1

Ved å løse $x = 1 + 2t$ for t, finner vi et uttrykk vi kan sette inn i $y = t^2$. Vi ser direkte at $t = \frac{1}{2}(x-1)$, slik at $y = \frac{1}{4}(x-1)^2$.



Figur 1: Den parametriske kurven $x = 1 + 2t$, $y = t^2$

6 Exercise 8.2.9

Siden $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, har vi $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$, som er likningen for en astroide, se Figur 2. Legg merke til at kurven er innom alle fire kvadranter, dette er mulig siden potensen er odde i både x og y.

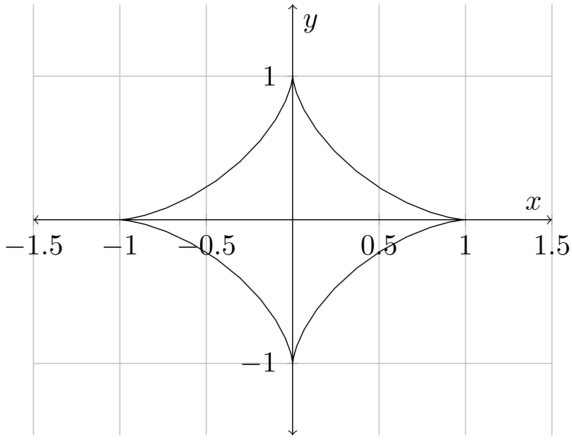
7 Exercise 8.3.9

Formelen for stigningstallet til en parametrisert kurve $x = f(t)$, $y = g(t)$ er

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}.$$

I vårt tilfelle har vi

$$x = f(t) = t^3 + t, \quad f'(t) = 3t^2 + 1,$$



Figur 2: Den parametriske kurven $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$

og

$$y = g(t) = 1 - t^3, \quad g'(t) = -3t^2,$$

og vi skal finne stigningstallet i $t = 1$. Ved innsetting i formelen får vi

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1} = \left.\frac{g'(t)}{f'(t)}\right|_{t=1} = \left.\frac{-3t^2}{1+3t^2}\right|_{t=1} = -\frac{3}{4}.$$

$\boxed{8}$ Exercise 8.3.17

En parametrisert kurve er glatt i et gitt punkt dersom begge komponentfunksjonenes deriverte er kontinuerlige og ikke begge 0 i det aktuelle punktet.

Her har vi $x = t^3$ og $y = t^2$, hvor begge komponentfunksjonenes deriverte er 0 i $t = 0$, slik at den parametriserte kurven ikke er glatt der.

$\boxed{9}$ Exercise 8.4.5

Formelen for kurvelengde er

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

For $x = t^2 \sin t$, $y = t^2 \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, har vi

$$x'(t) = 2t \sin t + t^2 \cos t$$

og

$$y'(t) = 2t \cos t - t^2 \sin t$$

som gir

$$\begin{aligned} x'(t)^2 + y'(t)^2 &= \left(2t \sin t + t^2 \cos t\right)^2 + \left(2t \cos t - t^2 \sin t\right)^2 \\ &= 4t^2 \sin^2 t + 4t^3 \sin t \cos t + t^4 \cos^2 t + 4t^2 \cos^2 t - 4t^3 \sin t \cos t + t^4 \sin^2 t \\ &= t^2 \left(4 + t^2\right) \end{aligned}$$

Dermed har vi

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{t^2\left(4+t^2\right)}\, dt = \int_0^{2\pi} t\sqrt{4+t^2}\, dt.$$

Substitusjonen $u = 4 + t^2$, fulgt av tilbakesubstitusjon for å slippe å beregne nye grenser, gir så

$$L = \frac{1}{2}\int_{t=0}^{t=2\pi} u^{\frac{1}{2}}\, du = \left[\frac{1}{2}\frac{2}{3}\left(4+t^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2\pi} = \frac{8}{3}\left(\left(1+\pi^2\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right).$$

10 Exercise 8.4.8

Vi bruker samme fremgangsmåte som i oppgave 8.4.5, med $x = \sin^2 t$ og $y = 2\cos t$ har vi de deriverte

$$x'(t) = 2\sin t\cos t, \quad y'(t) = -2\sin t,$$

slik at

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = 4\sin^2 t\left(\cos^2 t + 1\right).$$

Dermed har vi

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4\sin^2 t\left(\cos^2 t + 1\right)}\, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin t\sqrt{\cos^2 t + 1}\, dt. \end{aligned}$$

Substitusjonen $u = \cos t$, $du = -\sin t\, dt$ gir

$$\begin{aligned} L &= -\int_1^0 2\sqrt{u^2+1}\, du = \int_0^1 2\sqrt{u^2+1}\, du \\ &= \left[u\sqrt{u^2+1} + \operatorname{arsinh} u\right]_0^1 = \sqrt{2} + \operatorname{arsinh} 1 = \sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}), \end{aligned}$$

hvor integralet enten slås opp[1] eller finnes ved delvis integrasjon fulgt av hyperbolsk–trigonometrisk substitusjon.

11 Review exercise 8.6

Vi ser at $x^2 + y^2 = 4$ for alle t i definisjonsområdet, så kurven ligger på en sirkel av radius 2. Siden $3 \cdot \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}$ ser vi at kurven er litt mindre enn en kvart sirkel. Den har omløpsretning *med* klokka siden cos og sin er byttet om sammenliknet med standard parametrisering av sirkelen, og befinner seg i første kvadrant siden den starter i $(0, 2)$.

12 Review exercise 8.15

En formel for arealet begrenset av en lukket parametrisert kurve $x = f(t)$, $y = g(t)$ er

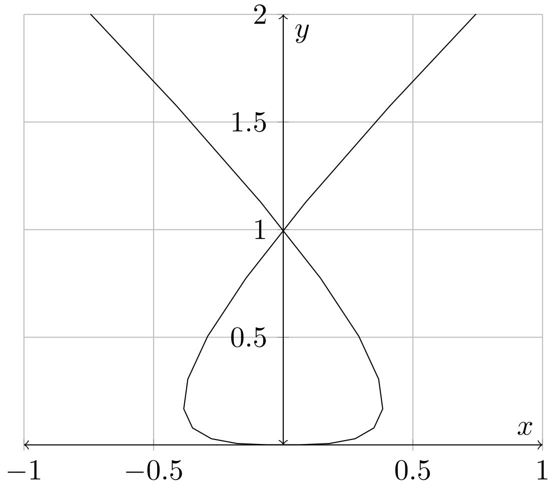
$$A = \pm\int_a^b g(t)f'(t)\, dt,$$

[1] I ettbindsutgaven finnes dette på innsiden av omslaget bakerst i boka.

der fortegnet er avhengig av parametriseringen av kurven.

Vi begynner med å finne ut når kurven skjærer seg selv, siden dette gir integrasjonsgrensene.

Som alltid er det nyttig å skissere kurven.



Figur 3: Den parametriske kurven $x = t^3 - t$, $y = |t^3|$

Av figuren ser vi at kurven skjærer seg selv i $(0, 1)$, som tilsvarer $t = -1$ og $t = 1$, som altså blir henholdsvis nedre og øvre integrasjonsgrense.

For å finne dette ved hjelp av likningene, setter vi

$$t_1^3 - t_1 = t_2^3 - t_2 \text{ og } |t_1^3| = |t_2^3|,$$

som gir $t_1 = \pm t_2$. Kun løsningen med $t_1 = -t_2$ er interessant, og gir $2\left(t_1^3 - t_1\right) = 0$. Dette gir løsningene $t_1 = 0$, som ikke er interessant, og $t_1 = \pm 1$, som er interessante, og de samme som vi fant ved inspeksjon av figuren.

Videre er $f'(t) = 3t^2 - 1$, slik at vi får

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{1} |t^3| \left(3t^2 - 1\right) dt \\ &= 2 \int_0^1 t^3 \left(3t^2 - 1\right) dt \\ &= 2 \left[\frac{1}{6} 3t^6 - \frac{1}{4} t^4\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$