8.2 Parametriske kurver

Def: En parametrisert kurve C består av to kont. funk. $f(t)$, $g(t)$ for $t \in I \subset \mathbb{R}$ (et intervall). Ligningene

$$x = f(t), \quad y = g(t) \qquad (t \in I)$$

~~er paramet~~ beskriver punktene på kurva.

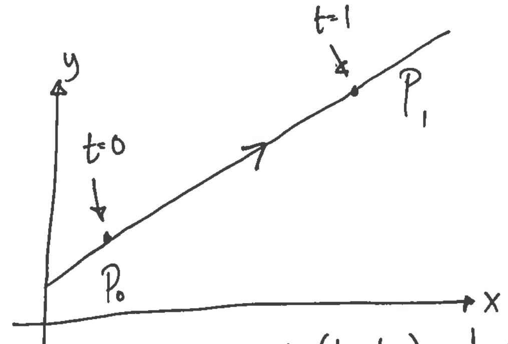
Mengden $\{(f(t), g(t)) : t \in I\}$ ~~beskriver~~ er en kurve i planet (eng. plane curve)

Eks: ~~Om g(t) er~~ $x = t$, $y = g(t)$ (grafen til g) er en kurve

~~Eksempele~~ E6 vs. GPS-sporing langs E6.

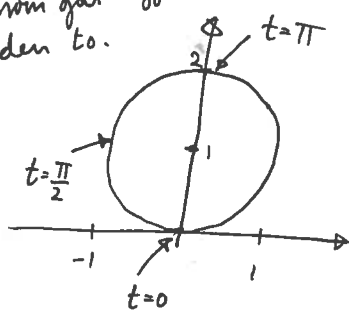
Eks: Gitt to (ulike) punkter $P_0 = (x_0, y_0)$ og $P_1 = (x_1, y_1)$ går det én og bare én rett linje gjennom P_0, P_1. Denne kan param.

$$x = x_0 + t(x_1 - x_0), \quad y = y_0 + t(y_1 - y_0) \qquad (t \in \mathbb{R})$$



Eks: $x = x_0 + a(t - t_0)$, $y = y_0 + b(t - t_0)$: kurve i retn. (a, b) som går igjennom (x_0, y_0) ved tiden t_0.

Eks: $x = -\sin t$, $y = 1 - \cos t$ $\quad (t \in [0, 2\pi])$



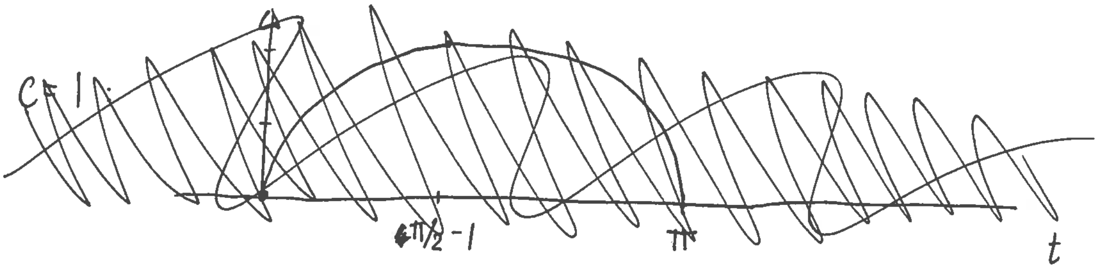
Mengden $\{(-\sin t, 1 - \cos t) : t \in [0, 2\pi)\}$ er en sirkel med radius 1, med senter $(0, 1)$.

Eks.: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in [0, 2\pi)$.

Dette er en ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

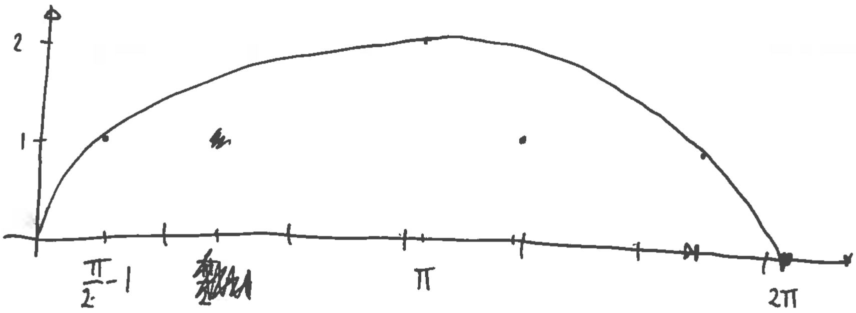
Dette er en lukket kurve

Eks.: $x = ct - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t \geq 0$



t	x	y
0	0	0
$\pi/2$	$\pi/2 - 1$	1
π	π	2
$3\pi/2$	$\frac{3\pi}{2} + 1$	1
2π	2π	0

La $c = 1$:



Reparametrisering

En kurve kan parametriseres på forskjellige måter. Sirkelen $x^2 + y^2 = 1$ kan parametriseres som:

(i) $x = \cos t$, $y = \sin t$ $\quad (t \in [0, 2\pi])$

(ii) $x = \cos(2t)$, $y = \sin(2t)$ $\quad (t \in [0, \pi])$

(iii) $x = 1 - t^2$, $y = t\sqrt{2 - t^2}$ $\quad (t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}])$

Hver av disse er parametriseringer av den samme kurva.

8.3 Glatte kurver

Def:

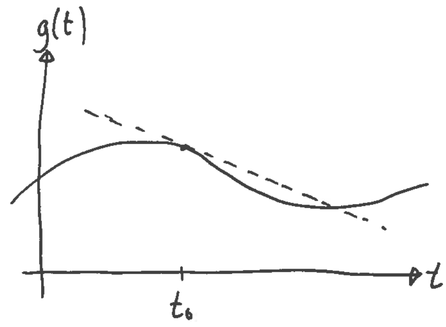
En kurve $\mathcal{C}$ er glatt (eng.: smooth) hvis den gjennom hvert punkt $P \in \mathcal{C}$ har en tangent, og denne tangenten endrer seg kontinuerlig ~~når P endrer seg~~ med P.

Eksempel

Om $g \in C^1(\mathbb{R})$ er den par. kurva $x = t$, $y = g(t)$ glatt: i hvert punkt $(t_0, g(t_0))$ har den tangent

$$x = t, \qquad y = g(t_0) + g'(t_0)(t - t_0),$$

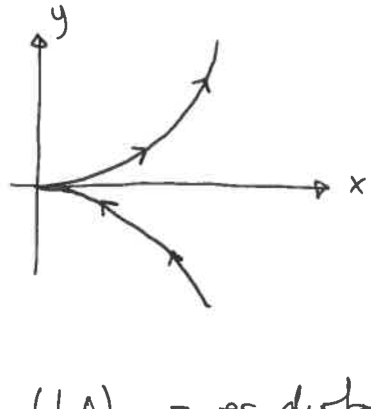
dvs. en linje i retning $(1, g'(t_0))$.



For generelle par. kurver $x = f(t)$, $y = g(t)$ kan det oppstå problemer der $f' = g' = 0$.

Eksempel:

La $f(t) = t^2$, $g(t) = t^3$. Kurva $x = f(t)$, $y = g(t)$ kan skrives om til $x^3 = y^2$, eller $x = y^{2/3}$ i Kartesiske koordinater:



I punktet $t = 0$ er $f'(t) = g'(t) = 0$.

Vi har $f'(t) = 2t$, $g'(t) = 3t^2$, så for $t \neq 0$ peker tangenten i retning

$$(2t, 3t^2).$$

I origo skifter denne retning fra $(-1, 0)$ til $(1, 0)$, og er derfor ikke glatt i $t = 0$.

Teorem

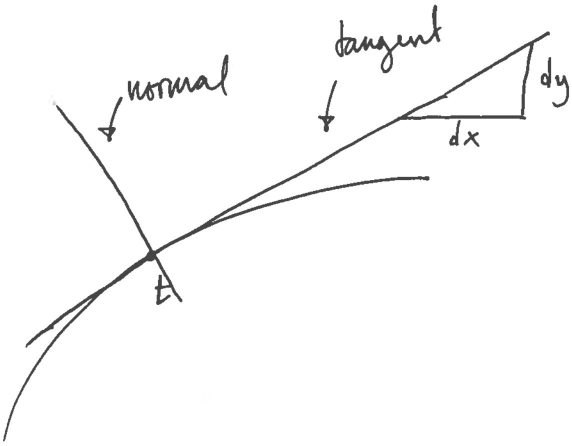
La $\mathcal{C}$ være gitt ved $x=f(t)$, $y=g(t)$, der f' og g' er kont. over I.

(i) Hvis $f'(t)\neq 0 \ \forall t\in I$, så er $\mathcal{C}$ glatt, og tangentlinja for hvert $t\in I$ ~~har~~ stigningstall

$$\frac{dy}{dx}=\frac{g'(t)}{f'(t)}.$$

(ii) Hvis $g'(t)\neq 0 \ \forall t\in I$, så er $\mathcal{C}$ glatt, og i hvert $t\in I$ har kurva en normal med stigningstall

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{f'(t)}{g'(t)}$$



Bevis:

(i) Hvis $f'(t)\neq 0$ på I, så er f ~~invertibel~~ inverterbar, så vi kan skrive $t=f^{-1}(x)$, og følgelig $y=g(f^{-1}(x))$. Da er

$$\frac{dy}{dx}=g'(f^{-1}(x))\frac{d}{dx}\left(f^{-1}(x)\right)=g'(t)\frac{1}{f'(t)}.$$

Dette er en kontinuerlig funksjon av t, så kurva er glatt.
Et lignende bevis holder for (ii). ▨

Generelt er tangenten gitt ved

$$x=f(t_0)+f'(t_0)(t-t_0), \quad y=g(t_0)+g'(t_0)(t-t_0)$$

i alle t_0 der minst én av f' og g' er ulik 0. Normalen er

$$x=f(t_0)+g'(t_0)(t-t_0), \quad y=g(t_0)-f'(t_0)(t-t_0)$$

Eksempel:

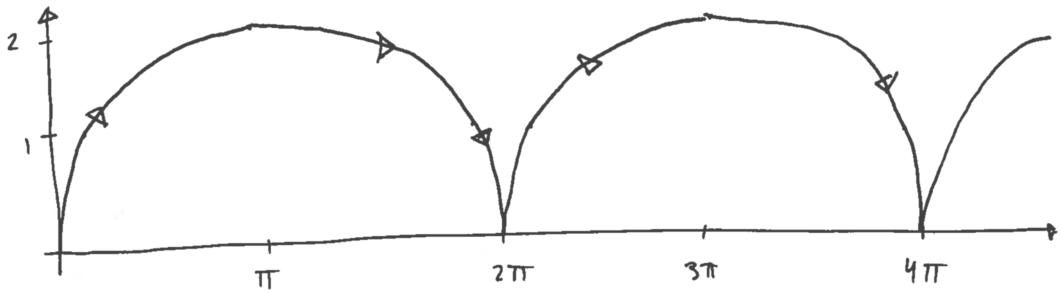
~~Sykloiden er gitt ved~~ Vi betrakter kurva

$$x = ct - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \qquad t \geq 0.$$

Om $f(t) = ct - \sin t$, $g(t) = 1 - \cos t$ så er

$$f'(t) = c - \cos t, \quad g'(t) = \sin t.$$

$g'(t)$ er lik null når $t = 0, \pi, 2\pi, \dots$, mens $f'(k\pi) = c - \cos(k\pi) = c - (-1)^k$ for $k = 0, 1, 2, \dots$. Altså ~~er~~ kan f' og g' være null samtidig kun dersom $c = -1$ eller $c = 1$. Sistnevnte er nettopp sykloiden



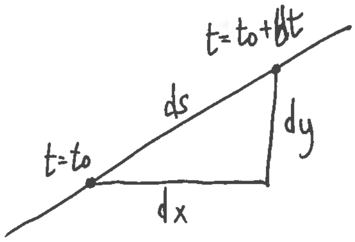
Vi ser at sykloiden ikke er glatt i $t = 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$.

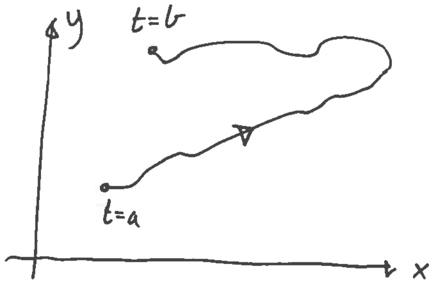
8.4 Kurvelengder og arealer

Vi lar nå $\mathcal{C}$ være gitt ved en glatt kurve

$$x = f(t), \quad y = g(t), \qquad a \le t \le b$$

Vi "zoomer" inn på et punkt $t = t_0$





Da er $ds^2 = dx^2 + dy^2$ (Pythagoras), så

$$ds = \frac{ds}{dt}\,dt = \sqrt{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}\,dt = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

Dermed er kurvelengden gitt ved

$$s = \int_a^b s(t)\,dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}(t)\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}(t)\right)^2}\,dt$$

__Eksempel:__

Vi betrakter sykloiden $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$. Da er

$\frac{dx}{dt}(t) = 1 - \cos t$, $\frac{dy}{dt}(t) = \sin t$, så over $t \in [0, 2\pi]$ er

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + (\sin t)^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2(t/2)}\,dt = \int_0^{2\pi} 2\sin(t/2)\,dt$$

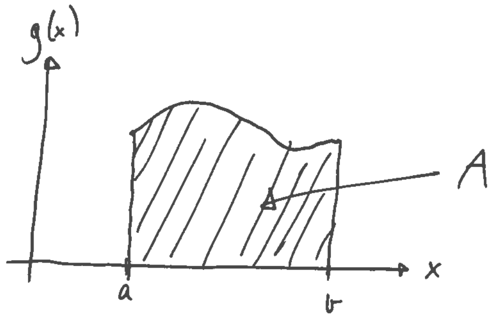
$$= \Big[-4\cos(t/2)\Big]_{t=0}^{2\pi} = 4(1+1) = \underline{\underline{8}}$$

Areal omsluttet av en kurve

- Hvis kurva $\mathcal{C}$ er gitt ved en graf, $y = g(x)$, så er arealet av omr. mellom kurva og x-aksen

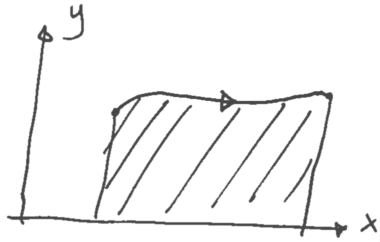
$$A = \int_a^b g(x)\,dx$$

(om $g \geq 0$).



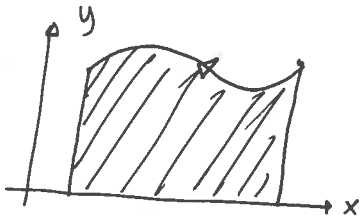
- Betrakt nå kurva $x = f(t)$, $y = g(t)$. Om $f'(t) \geq 0$ og $g(t) \geq 0$ kan vi sette inn $dx = \frac{dx}{dt}dt = f'(t)\,dt$ og få

$$A = \int_a^b f'(t)g(t)\,dt$$



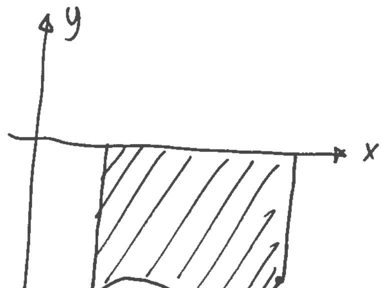
- Om $f'(t) \leq 0$, $g(t) \geq 0$ er

$$A = -\int_a^b f'(t)g(t)\,dt$$



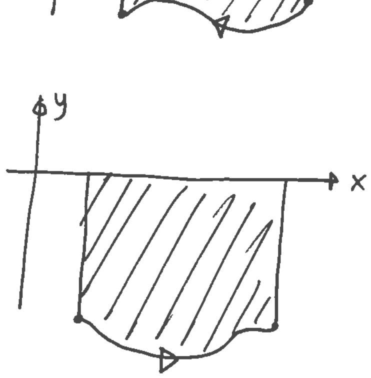
- Om $f'(t) \leq 0$, $g(t) \leq 0$ er

$$A = \int_a^b f'(t)g(t)\,dt$$



- Om $f'(t) \geq 0$, $g(t) \leq 0$ er

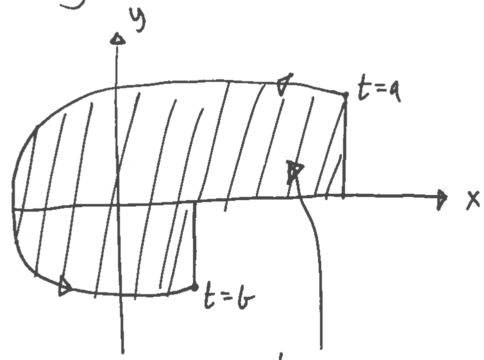
$$A = -\int_a^b f'(t)g(t)\,dt$$



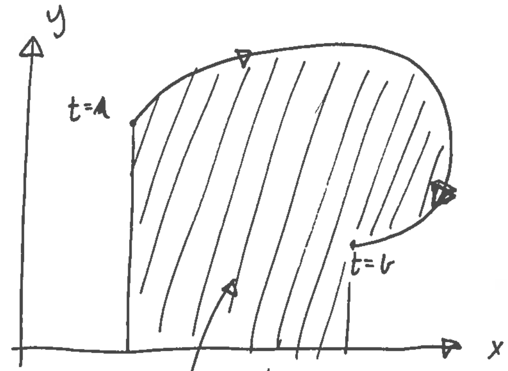
Mer generelt kan vi vise at

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,dt = A_1 - A_2 ,$$

hvor A_1 er arealet mellom kurva og x-aksen i de områder hvor $f'(t)g(t) \geq 0$, og A_2 det samme der $f'(t)g(t) \leq 0$.



$$A = -\int_a^b f'(t)g(t)\,dt$$

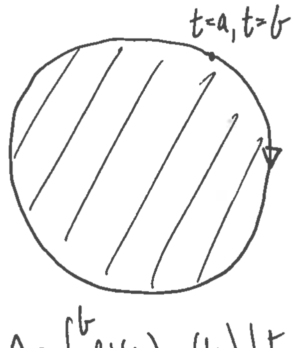


$$A = \int_a^b f'(t)g(t)\,dt$$

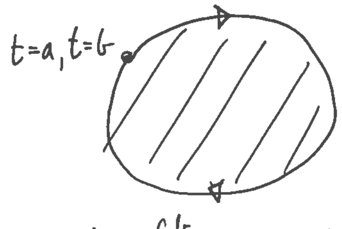
For lukkede kurver (der $f(a) = f(b)$, $g(a) = g(b)$) får vi da at arealet av området omsluttet av kurva er

(i) $A = \int_a^b f'(t)g(t)\,dt$ om parametriseringa går med klokka

(ii) $A = -\int_a^b f'(t)g(t)\,dt$ ellers.



$$A = \int_a^b f'(t)g(t)\,dt$$



$$A = -\int_a^b f'(t)g(t)\,dt$$

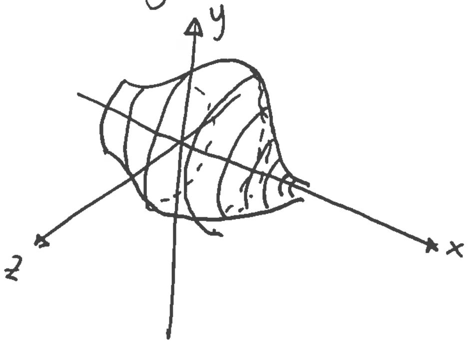
<u>Eksempel</u>: For sykloiden er $f'(t) \geq 0$ og $g(t) \geq 0$, så

$$A = \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2\,dt = \int_0^{2\pi} 1 - 2\cos t + \cos^2 t\,dt = 2\pi - 2\left[\sin t\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt$$

$$= 2\pi + \pi + \frac{1}{2}\left[\sin(2t)\right]_{t=0}^{2\pi} = \underline{3\pi}$$

Rotasjonsareal

Vi kan rotere en kurve om en akse og få en flate:



Rundt x-aksen har denne flaten areal

$$S = \int_{t=a}^{t=b} 2\pi |y| \, ds$$

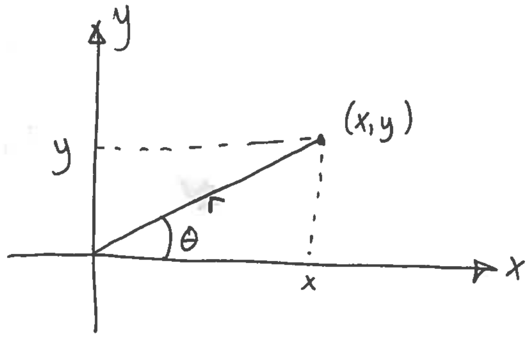
$$= 2\pi \int_a^b |g(t)| \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2} \, dt$$

Rundt y-aksen får vi

$$S = 2\pi \int_a^b |f(t)| \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2} \, dt .$$

8.5 Polarkoordinater og polarkurver

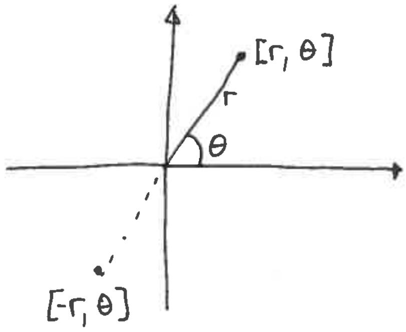
Polarkoordinatene til et punkt (x,y) er gitt ved



$$\boxed{x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,}$$

så $\boxed{x^2+y^2 = r^2 \quad \text{og} \quad \frac{y}{x} = \tan\theta.}$

Vi lar $\theta \in \mathbb{R}$. Merk at θ og $\theta + 2\pi$ tilsvarer samme vinkel (og generelt $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).



Vi skriver polarkoordinatene som $[r, \theta]$. Vi lar også r være negativ, og mener med punktet $[-r, \theta] = [r, \theta + \pi]$ for $r > 0$.

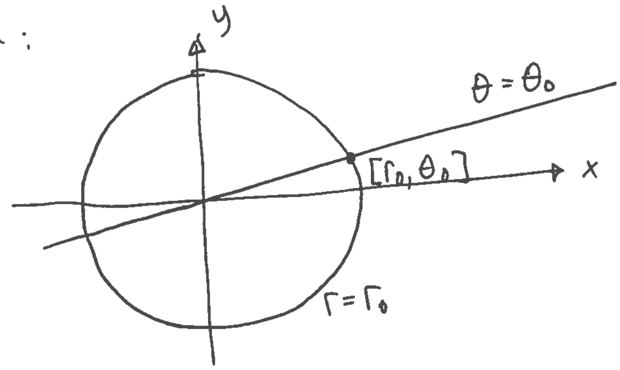
Eksempel:

Den rette linja $x - 2y = 3$ har polarlikning $r\cos\theta - 2r\sin\theta = 3$, eller

$$r = \frac{3}{\cos\theta - 2\sin\theta},$$

en ganske unaturlig måte å skrive en rett linje på.

Eksempel:



<u>Eksempel</u>: $r = 2r_0 \cos(\theta - \theta_0)$

Vi ganger med r:

$$r^2 = 2r_0\, r \cos(\theta - \theta_0) = 2r_0 r\left(\cos\theta \cos\theta_0 + \sin\theta \sin\theta_0\right)$$

$$= 2r_0 \cos\theta_0\, x + 2r_0 \sin\theta_0\, y$$

Siden $r^2 = x^2 + y^2$ får vi

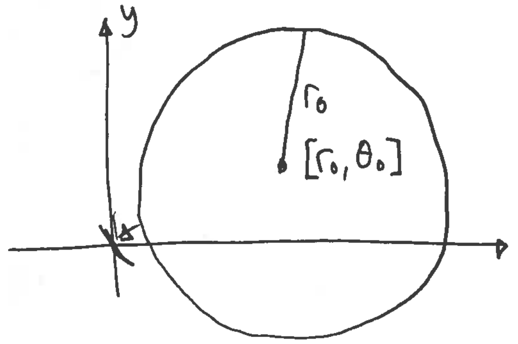
$$0 = x^2 - 2r_0 \cos\theta_0\, x + y^2 - 2r_0 \sin\theta_0\, y$$

$$= \left(x - r_0\cos\theta_0\right)^2 + \left(y - r_0 \sin\theta_0\right)^2 - r_0^2\cos^2\theta_0 - r_0^2 \sin^2\theta_0,$$

så

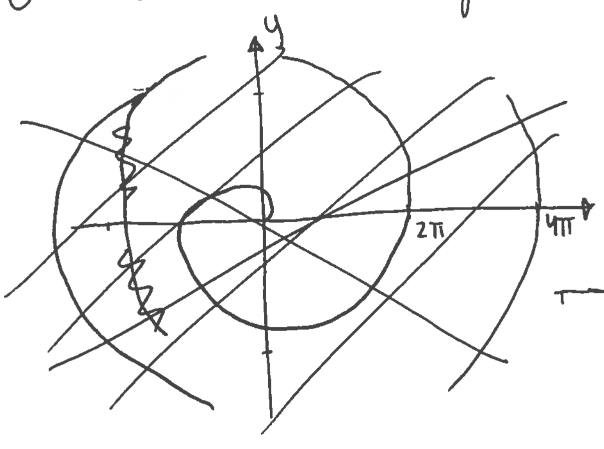
$$\left(x - r_0\cos\theta_0\right)^2 + \left(y - r_0\sin\theta_0\right)^2 = r_0^2.$$

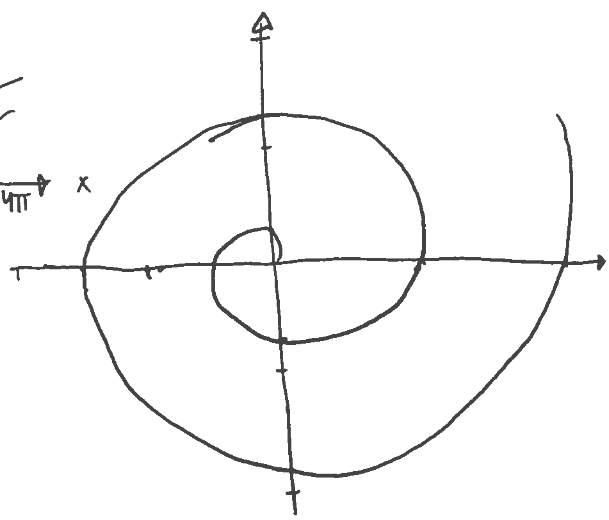
Dette er en sirkel med radius r_0 og senter $(r_0\cos\theta_0,\ r_0\sin\theta_0)$.



<u>Eksempel</u>: (Arkimedisk spiral)

$r = \theta$ beskriver en spiral



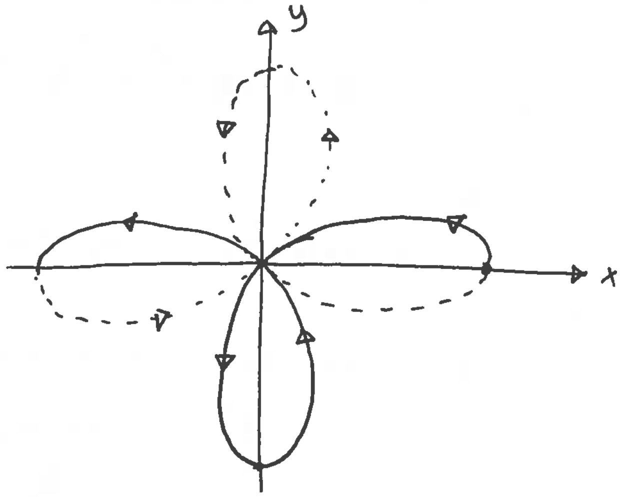


Rotasjon av en polarkurve: ~~Kurva~~ Likninga $r = f(\theta - \theta_0)$ beskriver den samme kurva som $r = f(\theta)$, men rotert mot klokka med vinkel θ_0.

Retning der $r=0$: Hvis $r = f(\theta)$ og $f(\theta_0) = 0$, vil kurva nærme seg origo fra retninga θ_0.

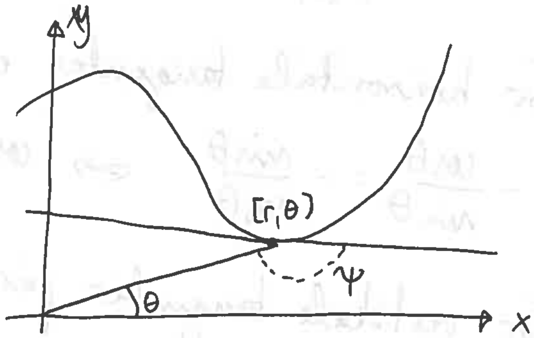
Eksempel: $r = \cos 2\theta$

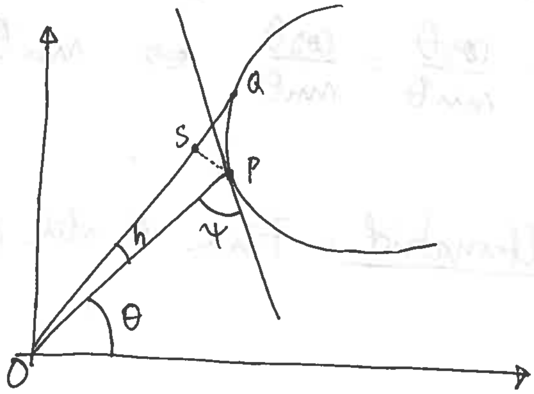
θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
r	1	0	-1	0	1



8.6 Tangenter, kurvelengder og arealer

Vi betrakter kurva $r = f(\theta)$. Hvis $f(\theta) = 0$ for en $\theta \in \mathbb{R}$, vil tangenten til kurva her peke i retning θ. Når $f(\theta) \neq 0$ kan vi beskrive tangenten med vinkelen ψ som anvist her:





Når $h \to 0$ vil $Q \to P$, og forholdet $\frac{PS}{SQ}$ vil nærme seg $\tan\psi$. Vi har $PS = f(\theta)\sin h$ og $SQ = OQ - OS = f(\theta+h) - f(\theta)\cos h$, så

$$\tan\psi = \lim_{h\to 0} \frac{f(\theta)\sin h}{f(\theta+h) - f(\theta)\cos h} = \lim_{h} \frac{f(\theta)\cos h}{f'(\theta+h) + f(\theta)\sin h} \quad \text{(L'Hopital)}$$

$$= \frac{f(\theta)}{f'(\theta)}$$

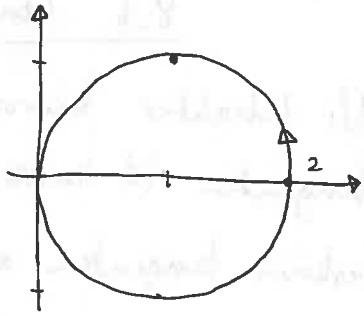
~~Ekse~~ For en horisontal tangent er $\psi + \theta = \pi$, så

$$\tan\psi = -\tan\theta,$$

mens for en vertikal tangent er $\psi + \theta = \frac{\pi}{2}$, så

$$\tan\psi = \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$

Eksempel: $r = 2\cos\theta, \quad \theta \in [0, \pi]$



Vi har $f(\theta) = 2\cos\theta$, så

$$\tan\psi = \frac{f(\theta)}{f'(\theta)} = \frac{2\cos\theta}{-2\sin\theta} = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

For horisontale tangenter er $\tan\psi = -\tan\theta$, så

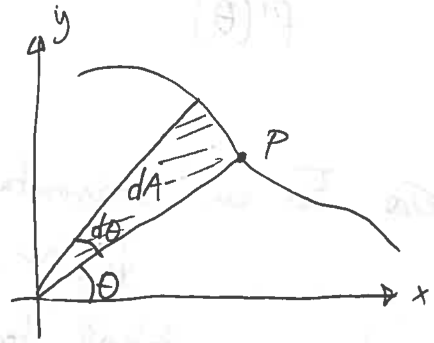
$$-\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = -\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \iff \cos^2\theta = \sin^2\theta \iff \pi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}.$$

For vertikale tangenter får vi $\tan\psi = \cot\theta$, dvs.

$$-\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \iff \sin\theta\cos\theta = 0 \implies \theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi.$$

Alternativt: Finn θ slik at $\frac{dy}{d\theta} = 0$ og $\frac{dx}{d\theta} = 0$.

Areal begrenset av polarkurver

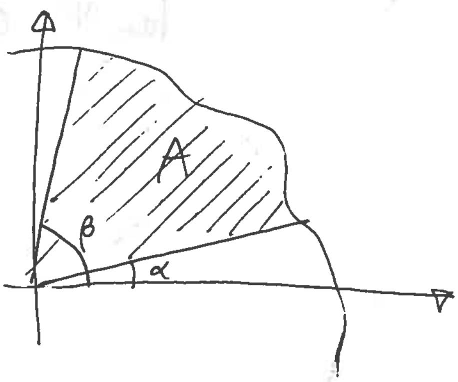


Vi har

$$dA = \frac{d\theta}{2\pi}\pi r^2 = \frac{f(\theta)^2}{2}\,d\theta$$

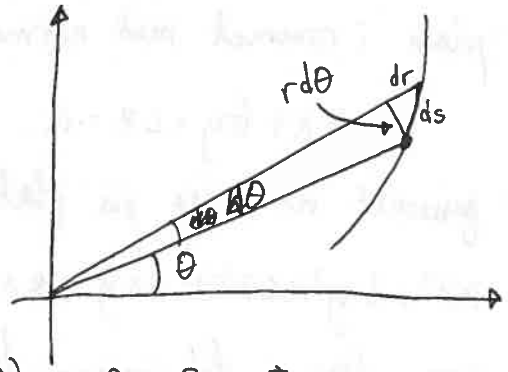
($\frac{d\theta}{2\pi}$ er en andel $d\theta$ av enhetssirkelen, og πr^2 er arealet til sirkelen med radius r). Vi får da

$$\boxed{A = \int_\alpha^\beta dA = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(\theta)^2\,d\theta}$$



Buelengde for polarkurver

Vi har



$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}\, d\theta,$$

så buelengden til kurva $r = f(\theta)$, $\theta \in [\alpha, \beta]$ er

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}\, d\theta = \int_\alpha^\beta \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2}\, d\theta.$$

Eksempel: Finn areal og buelengde for $r = 2\cos\theta$

10.5 Andregradsflater

Et plan i rommet med normal $n = (a, b, c) \neq 0$ kan skrives som

$$ax + by + cz = d$$

Mer generelt vil vi se på flater som kan skrives på formen

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz = j. \qquad (*)$$

Dersom denne likningen kan faktoriseres som

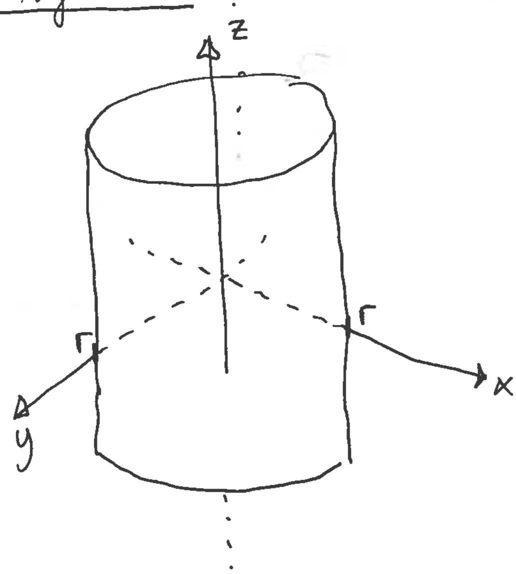
$$(a_1x + b_1y + c_1z - d_1)(a_2x + b_2y + c_2z - d_2) = 0$$

vil likningen være lik unionen av to flater. Hvis ikke sier vi at $(*)$ er en <u>andregradsflate</u>.

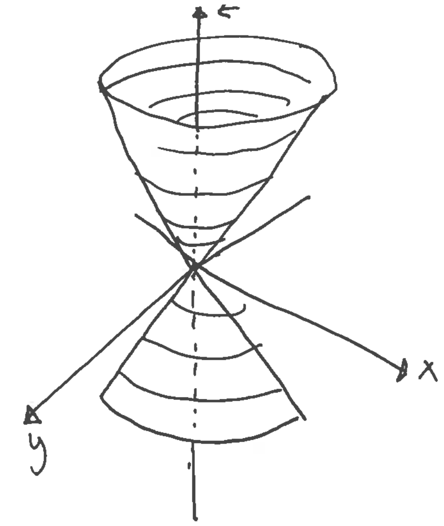
<u>Sfære</u>: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ beskriver en sfære med radius r og senter i origo.

<u>Ellipsoide</u>: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ beskriver en <u>ellipsoide</u> med akser a, b og c. Hvis $a = b = c = r > 0$ er ellipsoiden en sfære med radius r.

<u>Sylinder</u>: $x^2 + y^2 = r^2$ er et <u>sirkulært sylinder</u>.
Mer generelt sier vi at en likning $(*)$ som kun avhenger av to variable er et <u>sylinder</u>.

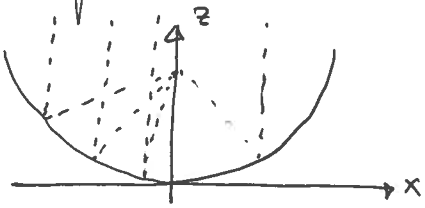


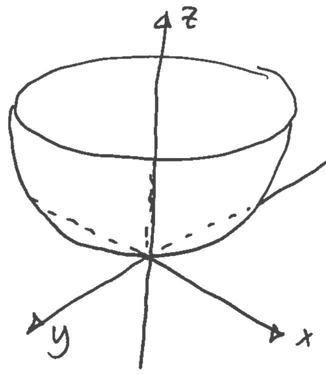
<u>Kjegle</u>: (eng. cone) $z^2 = x^2 + y^2$



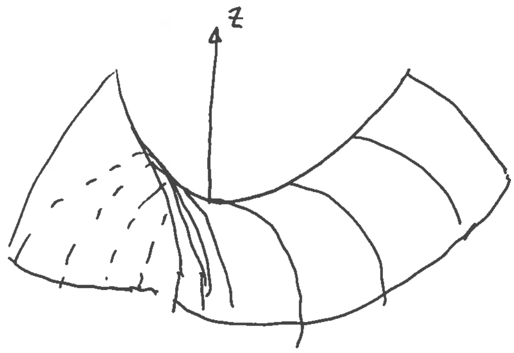
<u>Paraboloide</u>: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ og $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ er hhv. <u>elliptiske paraboloider</u> og <u>hyperbolske paraboloider</u> (snittet mellom likningen og planet $z = k$ er en ellipse / hyperbel).

Parabolantenner er formet som en elliptisk paraboloide.





Hyperbolske paraboloider kan beskrives som et nettverk av rette linjer, noe som gjør denne formen svært stabil.



<u>Hyperboloide</u>: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ er en <u>enkappet hyperboloide</u>, mens $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ er en <u>tokappet hyperboloide</u>.

En enkappet hyperboloide er en linjeflate, slik som hyperbolske paraboloider.

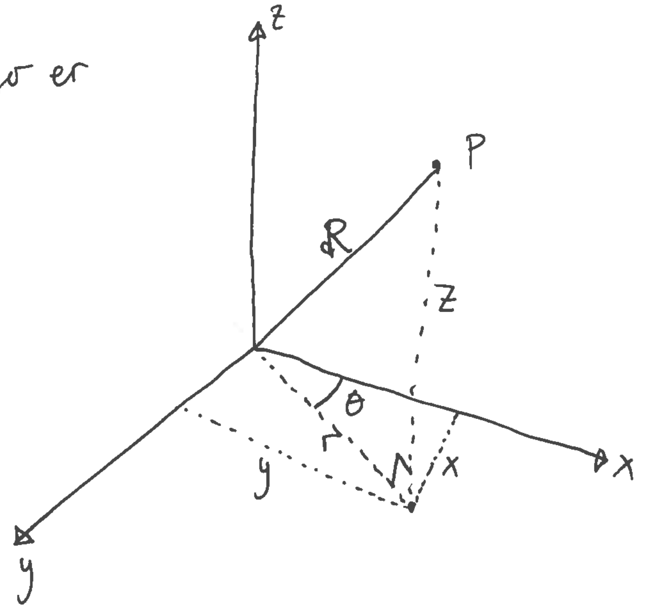
10.6 Sylinder- og kulekoordinater

Sylinderkoordinatene til et punkt P med kart. koord. (x, y, z) er $[r, \theta, z]$, der

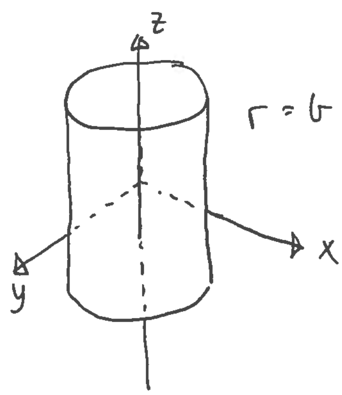
$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z.$$

Avstanden d fra P til origo er

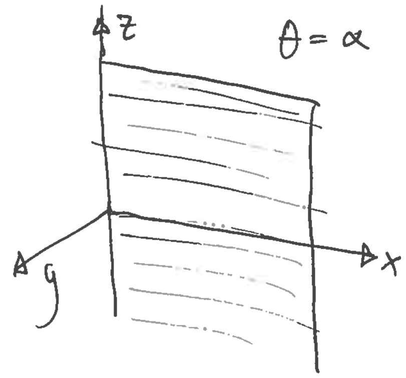
$R = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{r^2+z^2}$



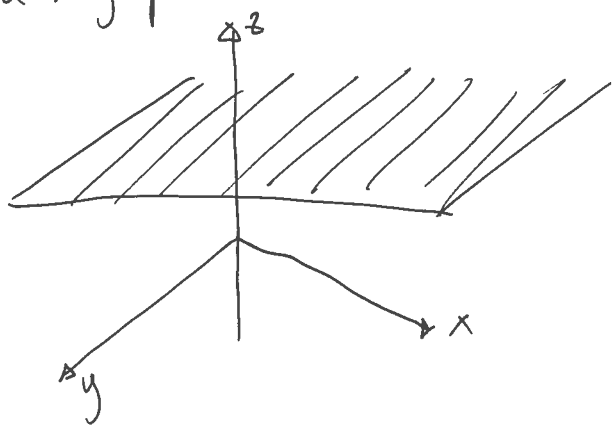
Flaten $r =$ ~~konstant~~ b (for et gitt tall b) er det sirkulære sylinderet med radius b.



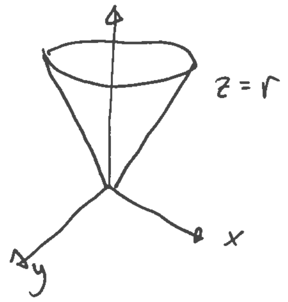
Flaten $\theta = \alpha$ er et halvplan (eller plan, dersom r kan være negativ) gjennom z-aksen



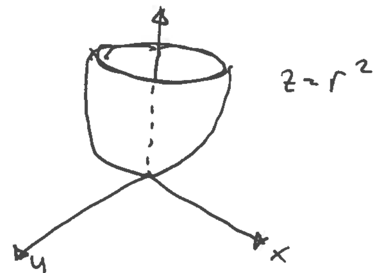
Flaten $z = k$ er et plan parallelt med x-y-planet



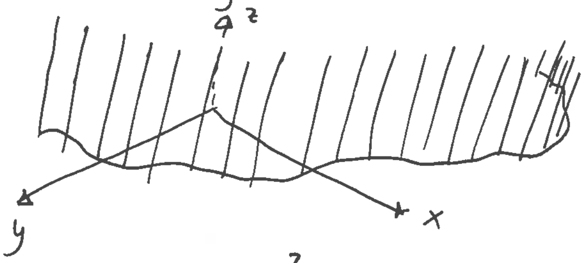
Eksempel: $z = r$, $r \geq 0$ er øvre kuledel av en kjegle: $z^2 = x^2 + y^2$



Eks.: $z = r^2$ er en sirkulær paraboloide



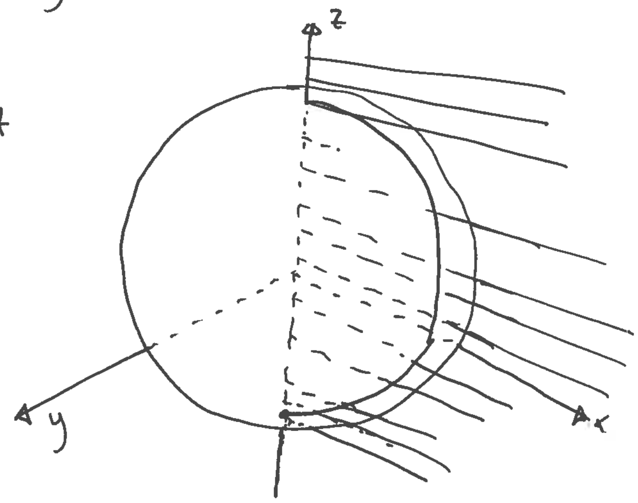
Eks: $r = f(\theta)$ er et sylinder



Eks.: $\theta = \pi/2$, $r^2 + z^2 = 4$ (snittet mellom flatene $\theta = \frac{\pi}{2}$ og $r^2 + z^2 = 4$):

$\theta = \frac{\pi}{2}$ er ~~halvplan~~ y-z-aksen for $y \geq 0$.

$r^2 + z^2 = 4$ er sfæren $x^2 + y^2 + z^2 = 4$



Kulekoordinater

Kulekoordinater er på formen $[R, \varphi, \theta]$, der

$$x = R \sin\varphi \cos\theta, \quad y = R \sin\varphi \sin\theta, \quad z = R \cos\varphi.$$

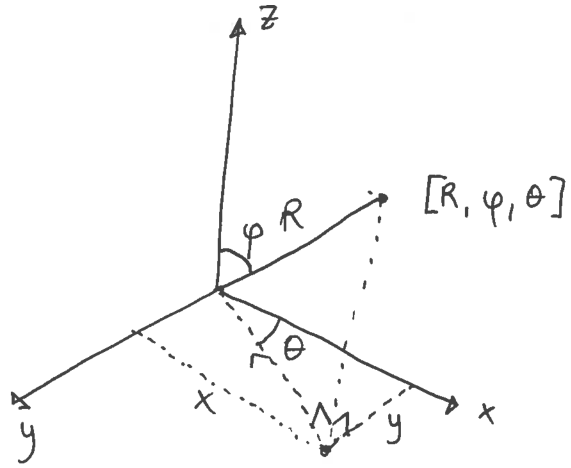
Merk også at

$$R^2 = x^2+y^2+z^2 = r^2+z^2,$$

og $r = \sqrt{x^2+y^2} = R\sin\varphi$,

så

$$\frac{r}{z} = \tan\varphi \quad \text{og} \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

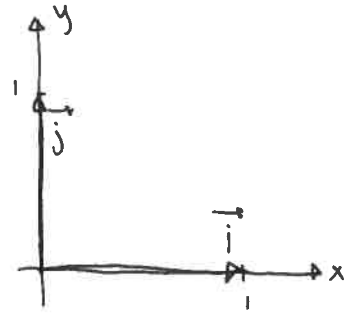


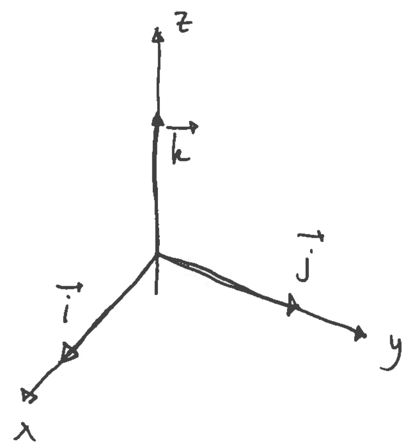
- $R = b$ er en sfære/kuleflate
- $\varphi = \alpha$ er sirkulære kjegler om z-aksen
- $\theta = \alpha$ er halvplan gjennom z-aksen.

Kulekoord. brukes ofte til å betegne punkter på en sfære.

11.1 Vektorvaluerte funksjoner og kurver

Vi lar $\vec{i}, \vec{j}$ være enhetsvektorene i planet langs x- og y-aksen, og $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ enhetsvektorene i rommet langs x-, y- og z-aksene.





Når vi skriver $\vec{r} = (x, y, z)$ mener vi $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Da er $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$. Mer generelt, om $\vec{r} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, er *lengden* til $\vec{r}$ definert som

$$|\vec{r}| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}}$$

Vi betrakter parametriserte kurver i rommet,

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

som vi ved å definere $\vec{r}(t) := (x(t), y(t), z(t))$ kan skrive

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

Om t betegner tid og $\vec{r}(t)$ posisjon, vil *hastigheten* være

$$\vec{v}(t) := \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h}.$$

Merk at om $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, vil $\frac{d\vec{r}}{dt}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.
Vi sier at $\vec{r}(t)$ er *deriverbar* dersom denne grenseverdien eksisterer.

Farten er definert som $v(t) := |\vec{v}(t)|$. Vi sier at kurva $\vec{r} = \vec{r}(t)$ er *glatt* dersom $\vec{r}(t)$ er kontinuerlig deriverbar og $v(t)$ aldri er lik null.

Merk at tangenten til en glatt kurve peker i retning $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t)$.

Akselerasjonen til et partikkel langs kurva $\vec{r} = \vec{r}(t)$ er gitt ved

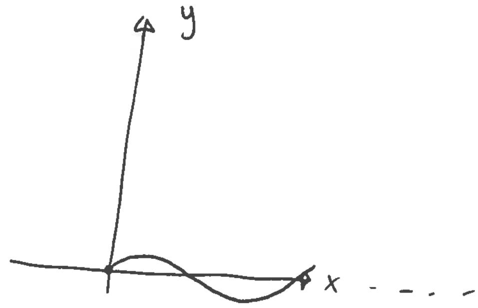
$$\vec{a}(t) := \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(t).$$

Eksempel: La $\vec{r}(t) = 5t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j}$. Da er

$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = 5\vec{i} + \cos t$; (eller $\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}(5t, \sin t) = (5, \cos t)$),

$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{25 + \cos^2 t}$,

$a(t) = -\sin t\,\vec{j}$



Teorem: (Derivasjonsregler)

La $\vec{u}(t)$ og $\vec{v}(t)$ være deriverbare vektorvaluerte funksjoner, og la $f(t)$ være en deriverbar skalar funksjon. Da er $\vec{u}(t) + \vec{v}(t)$, $f(t)\vec{u}(t)$, $\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t)$, $\vec{u} \times \vec{v}(t)$ og $\vec{u}(f(t))$ deriverbare, og

(a) $\frac{d}{dt}\left(\vec{u}(t) + \vec{v}(t)\right) =$

(b) $\frac{d}{dt}\left(f(t)\vec{u}(t)\right) =$

(c)

⋮

(f) $\frac{d}{dt}|u(t)| = \dfrac{\vec{u}(t) \cdot \frac{d\vec{u}}{dt}(t)}{|\vec{u}(t)|}$ (når $|\vec{u}(t)| \neq 0$)

Merk: Vi skriver $\vec{u}'(t) = \frac{d\vec{u}}{dt}(t)$.

11.3 Kurver og parametriseringer

__Eksempel__: Parametriser kurva gitt ved snittet mellom $z = x^2$ og $x + y = 2$.

Vi kan bruke både x og y som parameter, men ikke z.

La $x(t) = t$. Da er $y(t) = 2 - t$ og $z(t) = t^2$, og

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + (2-t)\vec{j} + t^2\vec{k}.$$

Hastigheten er $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = \vec{i} - \vec{j} + 2t\vec{k}$, og farten

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{1 + 1 + 4t^2} = \sqrt{2(1+2t^2)}.$$

__Eksempel__: Parametriser kurva i snittet mellom $x + 2y + 4z = 4$ og $x^2 + 4y^2 = 4$

(par. ellipsesylinderet $x^2 + 4y^2 = 4$ med $x = 2\cos t$, $y = \sin t$)

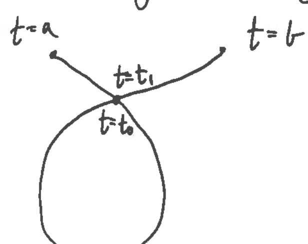
__Merk__: Hvis $\vec{r} = \vec{r}(t)$ er en par. kurve og $f(t)$ er en deriverbar, __økende__ funksjon (dvs. $f'(t) > 0$), så er $\vec{r} = \vec{r}(f(t))$ en reparametrisering. Vi har

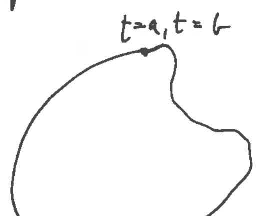
$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(f(t)) = \frac{d\vec{r}}{dt}(f(t)) \cdot f'(t)$$

og

$$\vec{v}(t) = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}(f(t))\right| f'(t).$$

__Definisjon__: Vi betrakter kurva $\vec{r} = \vec{r}(t)$ $(a \leq t \leq b)$. Denne er __lukket__ hvis $r(a) = r(b)$. Den __krysser seg selv__ om det er punkter $t_0 < t_1$ slik at $r(t_0) = r(t_1)$, men $r(t) \neq r(t_0)$ for $t \in (t_0, t_1)$. Kurva er en __enkel, lukket kurve__ dersom den kun krysser seg selv i endepunktene





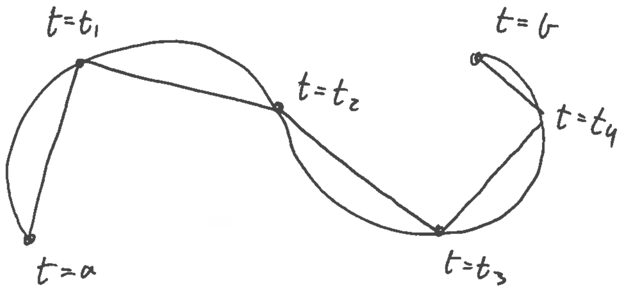
enkel, lukket

Buelengde

La $\mathcal{C}$ være en ~~glatt~~ kurve gitt ved $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $a \le t \le b$.

Vi deler opp intervallet $t \in [a,b]$ i n deler:

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b .$$



Lengden til approksimasjonen blir da

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} |\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}| , \quad \text{der} \quad \vec{r}_i := \vec{r}(t_i) , \quad i = 0, \dots, n .$$

Merk at

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right| (t_i - t_{i-1})$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left| \frac{r(t_i + \Delta t_i) - r(t_i)}{\Delta t_i} \right| \Delta t_i , \qquad \Delta t_i := t_{i+1} - t_i .$$

Dersom $\vec{r}(t)$ er kontinuerlig deriverbar, $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t)$, vil

$$\boxed{s := \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max_i \Delta t_i \to 0}} S_n = \int_a^b \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt = \int_a^b v(t)\, dt ,}$$

der $v(t) = |\vec{v}(t)|$.

Arc length element

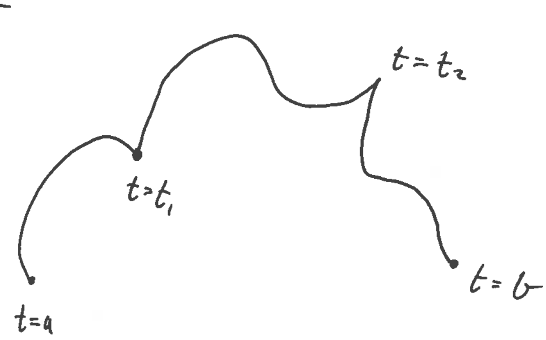
Hvis $s(t) := \int_a^t v(\tau)\, d\tau$ så er $\frac{ds}{dt}(t) = v(t)$, så buelengdeelementet ds er

$$\boxed{ds = \left| \frac{dr}{dt}(t) \right| dt}$$

Vi sier at $\mathcal{C}$ er <u>stykkevis glatt</u> om den har en parametrisering $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $a \le t \le b$ og tall $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ slik at

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \qquad t_{i-1} \le t \le t_i$$

er glatt for $i = 1, \dots, n$.



<u>Buelengdeparametrisering</u>

Vi kan alltid reparametrisere en glatt kurve $\vec{r} = \vec{r}(t)$ slik at den har fart lik 1. Hvis $f(\tau)$ er en økende funksjon så er

$$\frac{d}{d\tau}\left(\vec{r}(f(\tau))\right) = \frac{d\vec{r}}{dt}(f(\tau))\, f'(\tau)$$

og

$$v(\tau) = \left|\frac{d}{d\tau}\left(\vec{r}(f(\tau))\right)\right| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}(f(\tau))\right| f'(\tau).$$

Hvis $f(\tau) = s^{-1}(\tau)$, der $s(t) := \int_a^t \left|\frac{d\vec{r}}{dt}(\xi)\right| d\xi$, så er

$$f'(\tau) = \frac{1}{s'(s^{-1}(\tau))} = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}(s^{-1}(\tau))\right|^{-1} = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}(f(\tau))\right|^{-1},$$ så

$$v(\tau) \equiv 1.$$

<u>Altså</u>: Om $s = s(t)$ kan inverteres som $t = t(s)$, vil param.

$$\vec{r} = \vec{r}(t(s)), \qquad 0 < s < s(b)$$

ha ~~kan~~ fart lik 1.

<u>Eksempel</u>: Spiralen $\vec{r} = \cos t\, \vec{i} + \sin t\, \vec{j} + t\vec{k}$. Her er $\frac{d\vec{r}}{dt}(t) = -\sin t\, \vec{i} + \cos t\, \vec{j} + \vec{k}$, så $\left|\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\right| = \sqrt{2}$. ~~s(t)~~ Dermed er $s(t) = \sqrt{2}\,t$, så $t(s) = \frac{s}{\sqrt{2}}$. Dermed vil param.

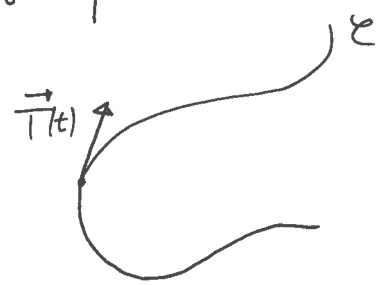
$$\vec r = \cos\frac{s}{\sqrt2}\,\vec i + \sin\frac{s}{\sqrt2}\,\vec j + \frac{s}{\sqrt2}\,\vec k$$

ha hastighet $v(s) = 1$.

10.4 Krumning

Anta at $\mathcal{C}$ er en glatt kurve, dvs. gitt ved $\vec r = \vec r(t)$, hvor $\vec r(t)$ er C^1 og $\left|\frac{d\vec r}{dt}\right| \neq 0$. Vi definerer <u>enhetstangentvektoren</u> $\vec T(t)$ som

$$\vec T(t) := \frac{\vec v(t)}{v(t)} = \frac{d\vec r}{dt}(t) \Big/ \left|\frac{d\vec r}{dt}(t)\right| .$$



Merk at $|\vec T(t)| \equiv 1$. Dersom param. er buelengdeparam. vil

$$\vec T(s) = \frac{d\vec r}{ds}(s) .$$

Vi antar fra nå av at dette er tilfellet. Da er

$$|\vec T(s)| = 1 \iff \vec T(s)\cdot\vec T(s) = 1 \implies \frac{d}{ds}\left(\vec T(s)\cdot\vec T(s)\right) = 0.$$

Men da er

$$\frac{d}{ds}\left(\vec T(s)\cdot\vec T(s)\right) = 2\vec T(s)\cdot\frac{d\vec T}{ds}(s) = 0,$$

så $\vec T(s)$ og $\frac{d\vec T}{ds}(s)$ står vinkelrett på hverandre.

Definisjon

Krumningen til $\mathcal{C}$ i punktet $\vec{r}(s)$ er gitt ved

$$\kappa(s) := \left|\frac{d\vec{T}}{ds}(s)\right|.$$

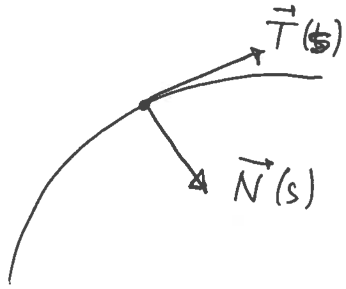
Krumningsradien er gitt ved

$$\rho(s) := \frac{1}{\kappa(s)}.$$

Enhetsnormalen er gitt ved

$$\vec{N}(s) := \frac{1}{\kappa(s)} \frac{d\vec{T}}{ds}(s) = \frac{d\vec{T}}{ds}(s) \Big/ \left|\frac{d\vec{T}}{ds}(s)\right|$$

Merk at $|\vec{N}(s)| = 1$, og $\vec{N}(s) \cdot \vec{T}(s) = 0$.



Eksempel: $x = \cos t$, $y = \sin t$. Merk: $s(t) = t$.

Beregn $\vec{T}(s)$, $\kappa(s)$ og $\vec{N}(s)$.

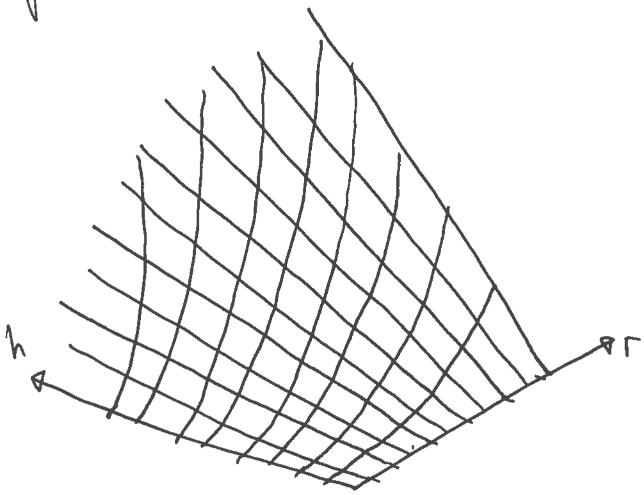
Eksempel: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$.

12.1 Funksjoner av flere variable

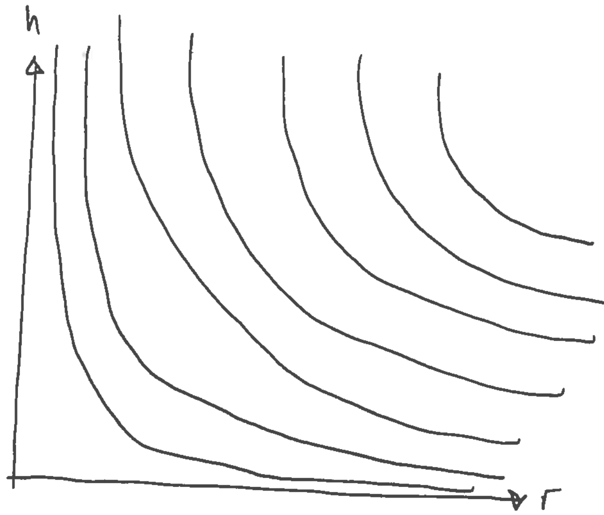
En funksjon av flere variable er en regel som til enhver $\vec{r} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{D}(f)$ gir et unikt tall $f(\vec{r}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. $\mathcal{D}(f)$ er domenet til f, og $f(\mathcal{D}(f))$ er bildet til f (range).

Eks: Topografien i et landskap kan beskrives med en funksjon $h(x,y)$ som gir høyden (over havet) til ethvert punkt (x,y).

Eks: Volumet til et sylinder $V(r,h) = \pi r^2 h$, $r \geq 0, h \geq 0$.
Vi kan visualisere denne på forskjellige måter: Vi kan tegne flaten $z = V(r,h)$, eller vi kan tegne konturflatene $V(r,h) \equiv \text{const}$.



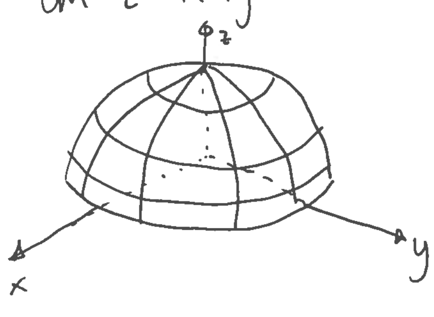
Flaten $z = V(r,h)$

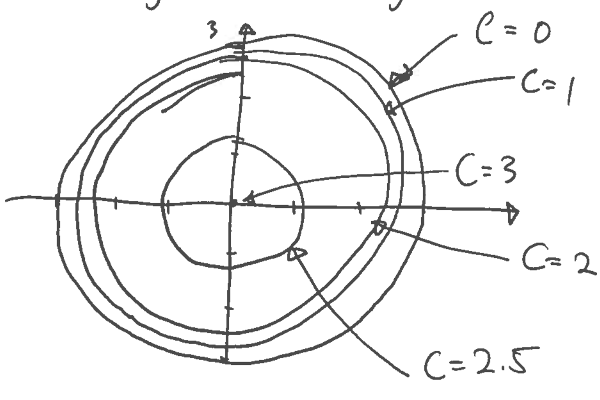


Kurvene $V(r,h) = C$

$$h = \frac{C}{\pi r^2}$$

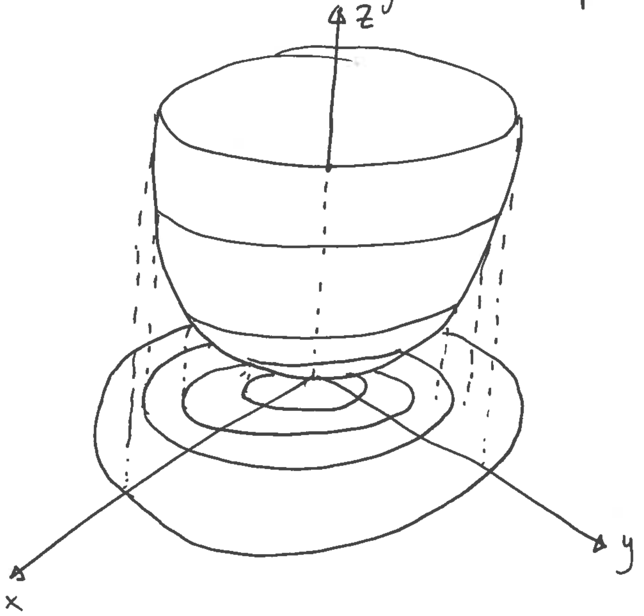
Eks: $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, $(x^2 + y^2) \leq 9$.
Om $z = f(x,y)$ er $z^2 + x^2 + y^2 = 9$. Om $f(x,y) = C$ er $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{9 - C^2}$





Eks: Tegn grafen og konturflatene til $f(x,y) = x^2+y^2$.

Flaten $z = x^2+y^2$ er en paraboloide



For funksjoner av tre variable blir ligningen $f(x,y,z) = C$ en flate i rommet

12.2 Grenseverdier og kontinuitet

Definisjon:

Vi sier at <u>$f(\vec{y})$ nærmer seg L når $\vec{y}$ nærmer seg $\vec{x}$</u>, og skriver

$$\lim_{\vec{y} \to \vec{x}} f(\vec{y}) = L$$

hvis det for hver $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at

$$\left| f(\vec{y}) - L \right| < \varepsilon$$

når $|\vec{x} - \vec{y}| < \delta$. Vi sier at <u>$f$ er kontinuerlig i $\vec{x} \in \mathcal{D}(f)$</u> dersom $\lim_{\vec{y} \to \vec{x}} f(\vec{y}) = f(\vec{x})$. Hvis f er kontinuerlig i alle $\vec{x} \in \mathcal{D}(f)$ sier vi at <u>f er kontinuerlig</u>.

Sats:

La f og g være slik at $M = \lim_{\vec{y} \to \vec{x}} f(\vec{y})$ og $L = \lim_{\vec{y} \to \vec{x}} g(\vec{y})$. Da er

(a) $\lim_{\vec{y} \to \vec{x}} (f \pm g) = \lim f \pm \lim g = M + L$

(b) $\lim (fg) = ML$

(c) $\lim (f/g) = M/L$ hvis $L \neq 0$ ~~$g \neq 0$ i en omegn om $\vec{x}$~~.

(d) Hvis $F(t)$ er en kontinuerlig funksjon, så er

$$\lim_{\vec{y} \to \vec{x}} F(f(\vec{y})) = F(M).$$

Eksempel: $f(x,y) = x^3 + 2xy$ er kontinuerlig i hele $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y) = a^3 + 2ab \text{ for alle } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

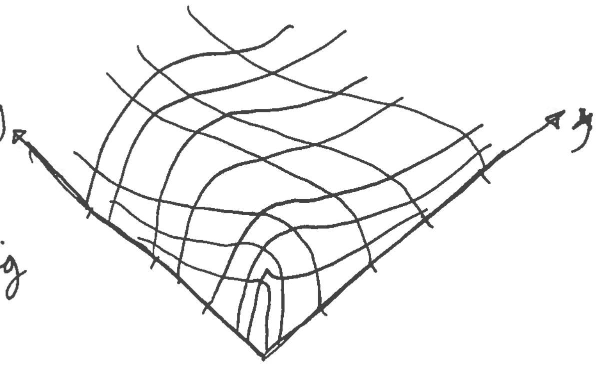
Eksempel: $f(x,y) := \frac{xy}{x^2+y^2}$ for $(x,y) \neq (0,0)$ er kontinuerlig.

Videre er $\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$, $\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$, men

$\lim_{s\to 0} f(s,s) = \lim_{s\to 0} \frac{s^2}{2s^2} = \frac{1}{2}$. Grenseverdien $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

eksisterer altså ikke.

Uansett hva vi definerer f som i origo kan f aldri utvides til en kontinuerlig funksjon i hele planet.



Eksempel: $f(x,y) := \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ er kontinuerlig i hele $\mathbb{R}^2$.

12.3 Partiellderiverte

Om $f(x,y)$ er en funksjon av to variable så er dens partiellderiverte

$$\partial_1 f(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x)}{h}, \quad \partial_2 f(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h},$$

eller $\partial_1 f(x,y) = \frac{d}{dx} f(x,y)$, $\partial_2 f(x,y) = \frac{d}{dy} f(x,y)$

(holdes fast) (holdes fast).

Mer generelt, ~~om $f(\vec{r})$~~ den partiellderiverte i retning k til en funksjon $f(\vec{r})$, $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$ er

$$\partial_k f(\vec{r}) := \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{e}_k) - f(\vec{x})}{h},$$

der $\vec{e}_k := (0,0,\dots,0,1,0,\dots,0)$.

k.te posisjon.

Vi skriver noen ganger $\partial_x f(x,y) = \partial_1 f(x,y)$ eller $\partial_y f(x,y) = \partial_2 f(x,y)$.

Eksempel: La $V(r,h) = \pi r^2 h$. Da er

$$\partial_r V(r,h) = \pi \cdot 2rh, \quad \partial_h V(r,h) = \pi r^2$$

Eksempel: La $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. Da er

$$\partial_x f(x,y) = \frac{y(x^2+y^2) - xy(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Merk: Vær forsiktig ved derivasjon av komposisjon av funksjoner. Om $f(x,y) = xy$ så er $\partial_x f(x,y) = y$, men

$$\partial_x\big(f(x,x+y)\big) = \partial_x\big(x(x+y)\big) = \partial_x(x^2+xy) = 2x+y \neq \partial_x f(x,x+y) = x+y$$

En versjon av kjerneregelen:

Gitt $f(x,y)$ og $F(t)$, er

$$\partial_x F(f(x,y)) = F'(f(x,y))\,\partial_x f(x,y),$$
$$\partial_y F(f(x,y)) = F'(f(x,y))\,\partial_y f(x,y).$$

Mer generelt er $\partial_k F(f(\vec{r})) = F'(f(\vec{r}))\,\partial_k f(\vec{r})$.

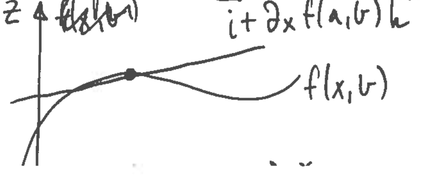
Tangentplan og normalen

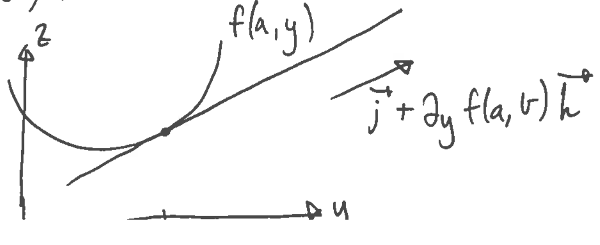
La $f = f(x,y)$ være gitt. I x-retning har f tangentlinje

$$z = f(a,b) + (x-a)\,\partial_x f(a,b)$$

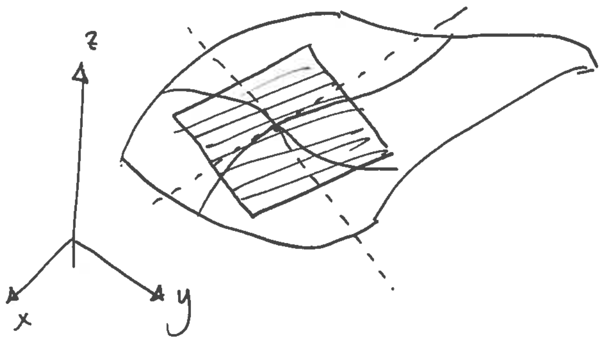
Dette er en linje som peker i retning $\vec{i} + \partial_x f(a,b)\,\vec{k}$.

I y-retning har f tangentlinje $z = f(a,b) + (y-b)\,\partial_y f(a,b)$, som peker i retning $\vec{j} + \partial_y f(a,b)\,\vec{k}$





<u>Tangentplanet</u> til f i (a,b) er planet spent av disse to vektorene.
Den har normal $\vec{n} = T_1 \times T_2 = \partial_x f(a,b)\,\vec{i} + \partial_y f(a,b)\,\vec{j} - \vec{k}$



Tangentplanet til f gjennom (a,b) har derfor ligning

$$z = f(a,b) + (x-a)\,\partial_x f(a,b) + (y-b)\,\partial_y f(a,b)$$

<u>Eksempel</u>: Finn en ligning for tangentplanet til $f(x,y) = x^3 y$ i punktet $(x,y) = (2,3)$.
Vi har $\partial_x f(x,y) = 3x^2 y$ og $\partial_y f(x,y) = x^3$, så $\partial_x f(2,5) = 72$ og $\partial_y f(2,3) = 8$, så tangentplanet har ligning

$$z = 24 + (x-2)\cdot 72 + (y-3)\cdot 8.$$

12.4 Høyereordens partiellderiverte

Vi kan derivere funksjoner av flere variable flere ganger:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right)$$

osv.

<u>Teorem</u>:

Dersom de n-te ordens partiellderiverte er kontinuerlige i en omegn om $\vec{p}$, spiller ikke rekkefølgen på partiellderivasjon noen rolle: f.eks. er

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

om f er to ganger ~~kontinuerlig~~ deriverbar.

<u>Eksempel</u>: (oppg. 12.4.5)

Finn de 2.ordens partiellderiverte til $f(x,y) := xe^y - ye^x$.

Vi har

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^y - ye^x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^y - e^x,$$

$$\underline{\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -ye^x}}, \quad \underline{\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = e^y - e^x}},$$

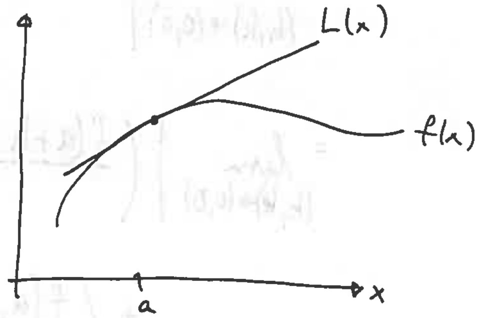
$$\underline{\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = xe^y}}.$$

12.6 Lineær approksimasjon og deriverbarhet

La $f(x)$ være en funksjon av én variabel. f er deriverbar dersom grenseverdien

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

eksisterer for alle $a \in \mathcal{D}(f)$. I såfall gir funksjonen



$$L(x) := f(a) + (x-a) f'(a)$$

en lineær approksimasjon av f. Om $x = a + h$ er $L(a+h) = f(a) + h f'(a)$, så

$$\lim_{h \to 0} \frac{L(a+h) - f(a+h)}{h} \cancel{= f'(a) - \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - h f'(a)}{h}} = 0.$$

I to dimensjoner er den lineære approksimasjonen til $f(x,y)$ i $(x,y) = (a,b)$

$$L(x,y) = f(a,b) + (x-a) \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b) \frac{\partial f}{\partial y}(a,b).$$

Vi sier nå at f er deriverbar dersom

$$\lim_{\vec{h} \to 0} \frac{L(\vec{p} + \vec{h}) - f(\vec{p} + \vec{h})}{|\vec{h}|} = 0$$

Merk at $\vec{h}$ er en vektor.

Teorem

Hvis $f(x,y)$ er slik at $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ er kontinuerlige i en omegn om (a,b), så er f deriverbar i (a,b).

Bevis:

La $\vec{h} = (h, k)$. Da er

$$\lim_{\vec{h}\to 0} \left| \frac{f(\vec{p}+\vec{h}) - L(\vec{p}+\vec{h})}{|\vec{h}|} \right|$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \left| \frac{f(a+h, b+k) - f(a,b) - h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) - k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}} \right|$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \left| \left(\frac{f(a+h, b+k) - f(a, b+k) - h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}} \right) + \left(\frac{f(a, b+k) - f(a,b) - k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}} \right) \right|$$

$$\leq \lim_{(h,k)\to(0,0)} \left| \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b+k)}{h} - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \right| \cdot \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$+ \lim_{(h,k)\to(0,0)} \left| \frac{f(a, b+k) - f(a,b)}{k} - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \right| \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$\Rightarrow 0$,

~~og~~ siden $\frac{\partial f}{\partial x}$ er kontinuerlig. ■

Eksempel: $V(r,h) := \pi r^2 h$ er deriverbar fordi $\frac{\partial V}{\partial r}(r,h) = 2\pi r h$ og $\frac{\partial V}{\partial h}(r,h) = \pi r^2$ er kontinuerlige.

~~Eksempel: $H(x,y) := \frac{xy}{x^2+y^2}$ er ikke deriverbar~~

Differensialer

Hvis de n partiellderiverte til en funksjon $f(x_1, \dots, x_n)$ eksisterer kan vi definere <u>differensialen</u> til f:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n)\,dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \dots, x_n)\,dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n)\,dx_n.$$

Med dette mener vi at df er en funksjon av $n+n$ variable, $df(x_1, \dots, x_n, dx_1, \dots, dx_n)$. Den lineære approksimasjonen L til $f(x,y)$ i (a,b) er f.eks.

$$L(x,y) = df(a, b, x-a, y-b) + f(a,b)$$

Vi har altså at

$$f(a+h, b+k) \approx f(a,b) + df(a, b, h, k)$$

dersom f er deriverbar i (a,b).

<u>Eksempel</u>: (12.6.3)

Approksimer $f(x,y) = \sin(\pi x y + \ln y)$ i $(0.01, 1.05)$.

Vi setter $(a,b) = (0,1)$. Vi har at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(\pi x y + \ln y)\cdot \pi y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos(\pi x y + \ln y)\left(\pi x + \frac{1}{y}\right).$$

Vi approksimerer

$$f(0.01, 1.05) \approx f(0,1) + df(0, 1, 0.01, 0.05)$$

$$= \sin(\pi\cdot 0 + \ln 1) + \cos(\pi\cdot 0 + \ln 1)\cdot \pi \cdot 1 \cdot 0{,}01 + \cos(\pi\cdot 0 + \ln 1)\left(\pi\cdot 0 + \frac{1}{1}\right)\cdot 0.05$$

$$= 0 + 0.01\pi + 0.05 = 0.05 + 0.01\pi \approx \underline{\underline{0.08}}$$

12.7 Gradienten og retningsderiverte

Hvis de n partiellderiverte til $f(x_1, \dots, x_n)$ eksisterer, definerer vi gradienten til f som

$$\nabla f(x_1, \dots, x_n) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n)\right).$$

$\left(\nabla = \text{"nabla"}\right)$. Dette er en vektorvaluert funksjon av flere variable.

Teorem:
Om $f(x,y)$ er deriverbar i (a,b) og $\nabla f(a,b) \neq (0,0)$, så er $\nabla f(a,b)$ en normalvektor på konturlinja gjennom (a,b).

Bevis:
La $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ være en parametrisering av konturlinja slik at $\vec{r}(0) = (a,b)$. Da er $f(\vec{r}(t)) = f(a,b)$ for t nærme 0, så

$$0 = \frac{d}{dt}\left(f(\vec{r}(t))\right) = \frac{d}{dt}\left(f(x(t), y(t))\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t).$$

$$= \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t).$$

I $t=0$ er $\vec{r}(t) = (a,b)$, så

$$\nabla f(a,b) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(0) = 0.$$

Men $\frac{d\vec{r}}{dt}(0)$ er tangenten til konturlinja i $\vec{r}(0) = (a,b)$, så $\nabla f(a,b)$ er ortogonal på konturlinja. ∎

Eksempel: (12.7.4) a) $\nabla f(2,0) = (0,2)$

b) $z = 1 + 2y$

c) $y = 0$

Retningsderiverte

For en funksjon $f(x,y)$ gir $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ stigningstallet til f i (x,y) i x- og y-retning. Mer generelt kan vi definere:

Def:

La $\vec{u}$ være en enhetsvektor og la $\vec{p} \in D(f)$. Da er den retningsderiverte til f i $\vec{p}$ i retning $\vec{u}$

$$D_{\vec{u}} f(\vec{p}) := \lim_{h \to 0^+} \frac{f(\vec{p}+h\vec{u}) - f(\vec{p})}{h}.$$

Merk at $D_u f(\vec{p}) = \frac{d}{dh} f(\vec{p}+h\vec{u})\Big|_{h=0}$.

Hvis $\vec{u} = \vec{i}$ blir $D_{\vec{i}} f(\vec{p}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{p})$, for $\vec{u} = \vec{j}$ blir $D_{\vec{j}} f(\vec{p}) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{p})$, osv

Teorem:

Hvis f er deriverbar i $\vec{p}$ og $|\vec{u}|=1$, så er

$$D_{\vec{u}} f(\vec{p}) = \vec{u} \cdot \nabla f(\vec{p})$$

Bevis:

$$D_{\vec{u}} f(\vec{p}) = \frac{d}{dh} f(\vec{p}+h\vec{u})\Big|_{h=0} = \left(\nabla f(\vec{p}+h\vec{u}) \cdot \vec{u}\right)\Big|_{h=0} = \nabla f(\vec{p}) \cdot \vec{u}.$$

$\blacksquare$

Egenskaper til gradienten og den retningsderiverte

- $\nabla f(\vec{p})$ peker i den retningen der f <u>øker mest</u>, og øker med stigningstall $|\nabla f(\vec{p})|$.
- f er konstant i retninger ortogonalt på $\nabla f(\vec{p})$.
- Om $\vec{r}(t)$ er deriverbar, kan kjerneregelen skrives som

$$\frac{d}{dt} f(\vec{r}(t)) = \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t),$$

eller $\frac{\partial}{\partial t} f(\vec{r}(t,s)) = \nabla f(\vec{r}(t,s)) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}(t,s)$

- Differensialen df kan skrives

$$df(\vec{p}, \vec{dp}) = \nabla f(\vec{p}) \cdot \vec{dp}$$

- Lineariseringen til f i $\vec{p}$ kan skrives

$$L(\vec{r}) = \nabla f(\vec{p}) \cdot (\vec{r} - \vec{p}) + f(\vec{p})$$

- Den retningsderiverte til f i retn. $\vec{u}$ er

$$D_{\vec{u}} f(\vec{p}) = \nabla f(\vec{p}) \cdot \vec{u}.$$

- Tangentlinja til konturlinja til f i punktet $\vec{p}$ har ligning

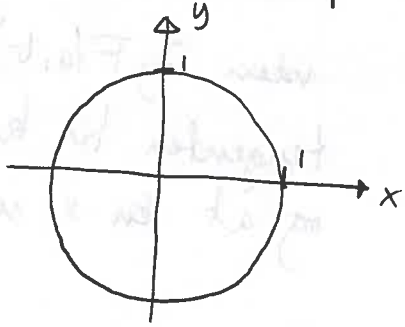
$$(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \nabla f(\vec{p}) = 0.$$

- Tangentflaten til $f(x,y)$ i punktet (a,b) har ligning

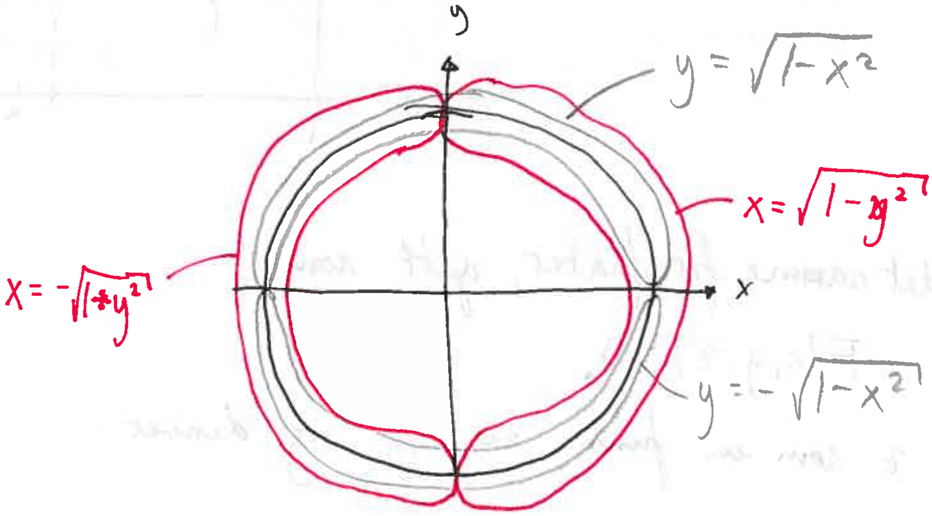
$$z = f(a,b) + (x-a, y-b) \cdot \nabla f(a,b)$$

12.8 Implisitte funksjoner

Mange kurver i planet kan ikke skrives som grafen til en funksjon $y(x)$, som f. eks. sirkelen $x^2+y^2-1=0$



Men man kan ofte dele inn ~~grafen~~ kurva i mindre deler som er grafen til en funksjon:



Mer abstrakt: gitt en kurve $F(x,y)=0$ vil vi finne en $y(x)$ (eller $x(y)$) slik at $F(x,y(x))=0$ (eller $F(x(y),y)=0$).

Funksjonen $y(x)$ (eller $x(y)$) er implisitt definert gjennom ligningen $F(x,y)=0$.

Gitt et punkt (a,b) på kurva kan vi finne den deriverte til $y(x)$ i (a,b) ved å derivere $F(x,y(x))=0$ m.h.p. x:

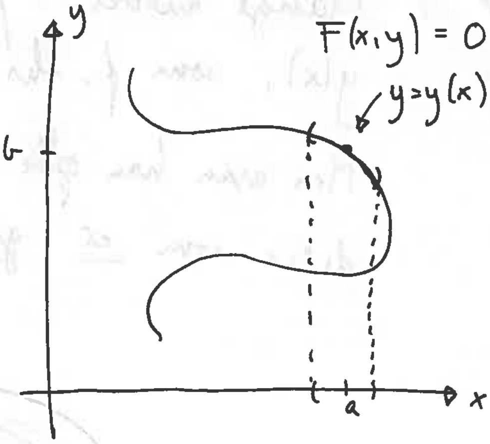
$$0=\frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))+\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))\frac{dy}{dx}(x)$$

$$\longrightarrow \quad \frac{dy}{dx}(x)=-\frac{\partial_x F(x,y(x))}{\partial_y F(x,y(x))},$$

så $\quad \frac{dy}{dx}(a)=-\frac{\partial_x F(a,b)}{\partial_y F(a,b)}$, dersom $\partial_y F(a,b)\neq 0$.

Betingelsen $\partial_y F(a,b) \neq 0$ garanterer at funksjonen $y(x)$ eksisterer i en omegn om $x=a$, $y=b$,

siden $\partial_y F(a,b) \neq 0$ garanterer at tangenten til kurva ikke blir vertikal og at én x svarer til mer enn én y.



~~Eks.~~:

Vi kan gjøre det samme for flater, gitt som

$$F(x,y,z) = 0.$$

Skriv f.eks. z som en funk. av x,y og deriver:

$$0 = \partial_x F(x,y,z(x,y)) + \partial_y F(x,y,z(x,y))\cancel{\frac{\partial y}{\partial x}} + \partial_z F(x,y,z(x,y))\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)$$

$$= \partial_x F + \partial_z F\, \partial_x z$$

$$\Rightarrow \quad \partial_x z(x,y) = -\frac{\partial_x F}{\partial_z F},$$

og

$$\partial_y z(x,y) = -\frac{\partial_y F}{\partial_z F}.$$

Igjen må vi ha $\partial_z F(x,y,z(x,y)) \neq 0$.

Eks: 12.8.3

Systemer av ligninger

Vi kan generalisere til systemer av ligninger, f. eks.

$$\begin{cases} F(x,y,z,w) = 0 \\ G(x,y,z,w) = 0 \end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Vi vil da få to funksjoner, f. eks.

$x(z,w),\ y(z,w)$ eller $x(y,z)$

$x(y,w),\ z(y,w)$ $\quad z(x,y)$

$\vdots$ $\quad \vdots$

Eksempel: Gitt $\begin{cases} F(x,y,z,w) = 0 \\ G(x,y,z,w) = 0 \end{cases}$, finn $\frac{\partial x}{\partial z}(z,w)$.

(Boka skriver $\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_w$) Vi har:

$$0 = \partial_z\big(F(x,y,z,w)\big) = \partial_x F\,\partial_z x + \partial_y F\,\partial_z y + \partial_z F\,\underset{1}{\underset{\shortparallel}{\partial_z z}} + \partial_z F\,\underbrace{\partial_z w}_{=0}$$

$$= \partial_x F\,\partial_z x + \partial_y F\,\partial_z y + \partial_z F$$

og

$$0 = \partial_x G\,\partial_z x + \partial_y G\,\partial_z y + \partial_z G.$$

Gang med hhv. $\partial_y G$ og $\partial_y F$ og subtraher:

$$0 = \partial_y G\left(\partial_x F\,\partial_z x + \cancel{\partial_y F\,\partial_z y} + \partial_z F\right) - \partial_y F\left(\partial_x G\,\partial_z x + \cancel{\partial_y G\,\partial_z y} + \partial_z G\right)$$

$$= \partial_z x\left(\partial_x F\,\partial_y G - \partial_y F\,\partial_x G\right) + \partial_y G\,\partial_z F - \partial_y F\,\partial_z G$$

$$\Rightarrow \partial_z x = -\frac{G_y F_z - F_y G_z}{F_x G_y - F_y G_x} = \frac{\det\begin{pmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix}}$$

Dette gjelder så lenge $F_x G_y - F_y G_x \neq 0$. Dette tallet er determinanten til Jacobi-matrisa

$$D_{(x,y)}(F,G) = \begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix}.$$

Eksempel: (12.8.12) Finn $\frac{du}{dx}$ om $\begin{cases} x^2y + y^2u - u^3 = 0 \\ x^2 + yu - 1 = 0. \end{cases}$

Her er x en fri variabel og $u = u(x)$, $y = y(x)$. Beregn:

$$0 = \frac{d}{dx}\left(x^2y + y^2u - u^3\right) = 2xy + x^2\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx}u + y^2\frac{du}{dx} - 3u^2\frac{du}{dx}$$

$$= 2xy + \frac{dy}{dx}\left(x^2 + 2uy\right) + \frac{du}{dx}\left(y^2 - 3u^2\right).$$

og

$$0 = \frac{d}{dx}\left(x^2 + yu - 1\right) = 2x + \frac{dy}{dx}u + y\frac{du}{dx}.$$

Gang med hhv. u og $x^2 + 2uy$:

$$0 = u\left(2xy + \cancel{\frac{dy}{dx}(x^2+2uy)} + \frac{du}{dx}(y^3 - 3u^2)\right) - (x^2+2uy)\left(2x + \cancel{u\frac{dy}{dx}} + y\frac{du}{dx}\right)$$

$$= \cancel{2xuy} - 2x^3 - \cancel{2xuy} + \frac{du}{dx}\left(uy^3 - 3u^3 - x^2y - 2uy^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{2x^3}{\underline{uy^3 - 3u^2 - x^2y - 2uy^2}}$$

Dette gjelder så lenge $\underline{uy^3 - 3u^2 - x^2y - 2uy^2 \neq 0}$

<u>12.8.14</u>

$$\begin{cases} x - r^2 - 2s = 0 \\ y - s^2 + 2r = 0 \end{cases}$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(x - r^2 - 2s\right) = 1 - 2r\frac{\partial r}{\partial x} - 2\frac{\partial s}{\partial x} \quad , \quad 0 = -2r\frac{\partial r}{\partial y} - 2\frac{\partial s}{\partial y}$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(y - s^2 + 2r\right) = -2s\frac{\partial s}{\partial x} + 2\frac{\partial r}{\partial x} \quad , \quad 0 = 1 - 2s\frac{\partial s}{\partial y} + 2\frac{\partial r}{\partial y}$$

$$\Rightarrow 0 = s\left(1 - 2r\frac{\partial r}{\partial x} - \cancel{2\frac{\partial s}{\partial x}}\right) - \left(\cancel{-2s\frac{\partial s}{\partial x}} + 2\frac{\partial r}{\partial x}\right) = s - 2rs\frac{\partial r}{\partial x} - 2\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$= s - 2(rs+1)\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{s}{2(rs+1)} .$$

$$0 = 1 - \cancel{2r\frac{\partial r}{\partial x}} - 2\frac{\partial s}{\partial x} + r\left(-2s\frac{\partial s}{\partial x} + \cancel{2\frac{\partial r}{\partial x}}\right) = 1 - 2(1+rs)\frac{\partial s}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{2(1+rs)} .$$

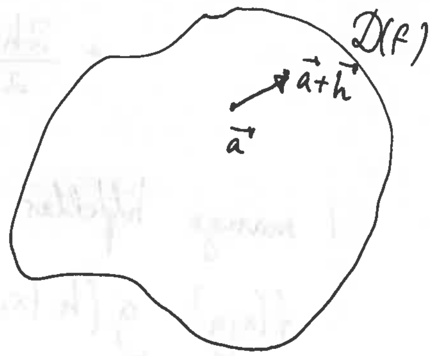
If $(x,y) = (0,0)$ then $r^2 + 2s = 0$, $s^2 - 2r = 0$, so $(r,s) = (0,0)$.

Hence,

$$\frac{\partial r}{\partial x}(0,0) = \frac{0}{2(0+1)} = \underline{\underline{0}}, \quad \frac{\partial s}{\partial x}(0,0) = \frac{1}{2(1+0)} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

12.9 Taylors formel

Vi kan finne en versjon av Taylors formel for funksjoner av flere variable $f(\vec{x})$ som følger:



La $\vec{a} \in \mathcal{D}(f)$ og la $\vec{h}$ være en liten vektor slik at $\vec{a}+\vec{h} \in \mathcal{D}(f)$. Definer $F(t) := f(\vec{a}+t\vec{h})$, slik at $F(0)=f(\vec{a})$ og $F(1)=f(\vec{a}+\vec{h})$. Da er

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2} + \cdots + \frac{F^{(m)}(0)}{m!} + \frac{F^{(m+1)}(\theta)}{(m+1)!}$$

for en $\theta \in [0,1]$. Vi har nå

$$F'(t) = \frac{d}{dt}\left(f(a+t\vec{h})\right) = \vec{h}\cdot\nabla f(\vec{a}+t\vec{h}),$$

så $F'(0) = \vec{h}\cdot\nabla f(\vec{a})$. Videre er

$$F''(t) = \frac{d}{dt}\left(\vec{h}\cdot\nabla f(\vec{a}+t\vec{h})\right) = \frac{d}{dt}\left(h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}+t\vec{h}) + \cdots + h_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}+t\vec{h})\right)$$

$$= h_1\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}+t\vec{h})\right) + \cdots + h_n\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}+t\vec{h})\right)$$

$$= h_1\vec{h}\cdot\nabla\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}+t\vec{h}) + \cdots + h_n\vec{h}\cdot\nabla\frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}+t\vec{h})$$

$$= (\vec{h}\cdot\nabla)^2 f(\vec{a}+t\vec{h}).$$

Med $(\vec{h}\cdot\nabla)^2$ mener vi, f.eks. om $n=2$:

$$(\vec{h}\cdot\nabla)^2 = \left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + h_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 = h_1^2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2h_1h_2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} + h_2^2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

Altså får vi

$$f(\vec{a}+\vec{h}) = f(\vec{a}) + \vec{h}\cdot\nabla f(\vec{a}) + \frac{(\vec{h}\cdot\nabla)^2 f(\vec{a})}{2} + \cdots + \frac{(\vec{h}\cdot\nabla)^m f(\vec{a})}{m!} + O(|\vec{h}|^{m+1}).$$

~~Ofte kan vi forenkle~~

For eksempel, om $n=2$, $m=2$ får vi

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$$
$$+ \frac{2hk}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) + \frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) + O(|(h,k)|^3)$$

I mange tilfeller er f på formen

$$f(x,y) = g(h(x,y)),$$

der g er en funksjon av én variabel. Da er

$$g(s+t) = g(s) + t g'(s) + \frac{t^2}{2} g''(s) + \cdots,$$

så

~~$f(x+h, y+k$~~

$$f(\vec{a}+\vec{h}) = g(h(\vec{a}+\vec{h})) = g\left(h(\vec{a}) + (h(\vec{a}+\vec{h}) - h(\vec{a}))\right)$$
$$= g(h(\vec{a})) + (h(\vec{a}+\vec{h}) - h(\vec{a}))g'(h(\vec{a})) + \cdots$$

Eksempel: (12.9.5) Finn Taylorutv. av $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ om $(0,0)$.
I $(x,y) = (0,0)$ er $x^2+y^2 = 0$. Vi har $f(x,y) = g(x^2+y^2)$, $g(s) = e^s$,
og $g(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{s^j}{j!}$. Altså er

$$f(x,y) = g(x^2+y^2) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x^2+y^2)^j}{j!}$$

Eksempel: (12.9.8) Utvikle $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ av grad 3 om $(1,0)$.
Vi har $f(x,y) = g(x^2+y^2)$, $g(s) = \ln(s)$. I $(x,y) = (1,0)$ er
$x^2+y^2 = 1$, og g utviklet om $s=1$ er

$$g(1+s) = \ln(1) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j!}(j-1)!\,s^j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1} s^j}{j}.$$

Altså er

$$f((h,k)+(1,0)) = g((h+1)^2+k^2) = g(1+2h+h^2+k^2)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}(2h+h^2+k^2)^j}{j}.$$

13.1 Ekstremalverdier

La $f(x)$ være en funksjon av én variabel, og anta at $f \in C^2(\mathbb{R})$. Da ~~har~~ har f et kritisk punkt i x om $f'(x) = 0$. Dette er en min. verdi om $f''(x) > 0$, og maks. om $f''(x) < 0$.

For funksjoner av flere variable gjelder noe tilsvarende.

<u>Eksempel</u>

La $f(x,y) := 1 - (x^2 + y^2)$. Da har f et maksimum i $(x,y) = (0,0)$. Vi har $\nabla f(x,y) = (-2x, -2y)$, så $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

Vi sier at $f(\vec{x})$ har et <u>lokalt maksimum</u> (minimum) i $\vec{x} = \vec{p}$ dersom $f(\vec{x}) \leq f(\vec{p})$ $\left(f(\vec{x}) \geq f(\vec{p})\right)$ for alle $\vec{x}$ i en omegn om $\vec{p}$. Det er et <u>globalt maksimum</u> (min.) dersom dette gjelder for alle $\vec{x} \in \mathcal{D}(f)$.

<u>Teorem</u> (nødvendige betingelser)

En funksjon $f(\vec{x})$ kan ha en ekstremalverdi i $\vec{x} = \vec{p}$ <u>kun</u> dersom $\vec{p}$ enten er

(i) et <u>kritisk punkt</u>, dvs. $\nabla f(\vec{p}) = \vec{0}$

(ii) et <u>singulærpunkt</u>, dvs. $\nabla f(\vec{p})$ eksisterer ikke

(iii) et <u>randpunkt</u> til f, dvs $\vec{p} \in \partial \mathcal{D}(f)$.

Vi sier at et kritisk punkt er et <u>sadelpunkt</u> dersom det hverken er et maksimum eller minimum.

Det finnes også tilstrekkelige betingelser som garanterer at f har en ekstremalverdi.

Vi sier at en mengde $A \subset \mathbb{R}^n$ er begrenset dersom det finnes en $R > 0$ slik at $A \subset B_R := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : |\vec{x}| < R\}$.

Vi sier at $A \subset \mathbb{R}^n$ er kompakt dersom A er lukket og begrenset.

Teorem:

Dersom f er kontinuerlig og $\mathcal{D}(f)$ er kompakt, så har f globale maksimum og minimum.

(Vi kommer tilbake til dette i kap. 13.2)

Klassifisering av kritiske punkter

Kritiske punkter til funksjoner av én variabel klassifiseres som maks.-, min.- eller sadelpunkter etter om $f''(x)$ er negativ, positiv eller null.

Eksempel:

(a) $f(x,y) := 1 - x^2 - y^2$ har et globalt maksimum i $(0,0)$, siden $f(x,y) = 1 - (x^2+y^2) \leq 1 = f(0,0)$. Vi har også $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -2 < 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -2 < 0$.

(b) $f(x,y) := x^2 - y^2$ har et sadelpunkt: $\nabla f(x,y) = (2x, -2y)$, så $\nabla f(0,0) = (0,0)$, men $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2 < 0$. Merk også at $f(h,0) = h^2 \geq 0$, mens $f(0,h) = -h^2 \leq 0$.

(c) $f(x,y) := \frac{(x+y)^2}{2} - (x-y)^2 = -\frac{x^2+y^2}{2} + 3xy$ har et sadelpunkt i $(0,0)$: $\nabla f(x,y) = (-x+3y, -y+3x)$, så $\nabla f(0,0) = (0,0)$, men

$f(h,h) = -h^2 + 3h^2 = 2h^2 \geq 0$, og

$f(h,-h) = -h^2 - 3h^2 = -4h^2 \leq 0$. Merk likevel at

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -1 < 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -1 < 0$.

De andrederiverte $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ er altså alene ikke nok til å bestemme om et kritisk punkt er et ekstremalpunkt.

~~Definisjon~~

~~En matrise~~ $\cancel{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$ ~~er pos~~

Definisjon

Hesse-matrisa til $f(x,y)$ er

$$H(x,y) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

Sats

La (a,b) være et kritisk punkt for f, dvs. $\nabla f(a,b) = (0,0)$.

~~Da er~~

(i) Om $\det(H(a,b)) > 0$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$, så har f et lokalt minimum i (a,b)

(ii) Om $\det(H(a,b)) > 0$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$, så har f et lokalt maksimum i (a,b)

(iii) Om $\det(H(a,b)) < 0$, så har f et sadelpunkt i (a,b)

(iv) Om $\det(H(a,b)) = 0$ kan alle over være tilfellet.

Eksempel: $f(x,y) := \frac{(x+y)^2}{2} - (x-y)^2$ har Hesse-matrise

$$\mathcal{H}(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \text{ så}$$

$$\det(\mathcal{H}(0,0)) = (-1)(-1) - 3\cdot 3 = -8 < 0.$$

Altså er $(0,0)$ et sadelpunkt for f.

13.2 Ekstremalverdier på begrensede områder

Enhver kontinuerlig funksjon $f(\vec{x})$ på et lukket, begrenset definisjonsområde $\mathcal{D}(f)$ har maksima og minima i $\mathcal{D}(f)$. Disse må enten være singulære punkter (∇f eksisterer ikke), kritiske punkter ($\nabla f(\vec{p}) = 0$) eller randpunkter ($\vec{p} \in \partial \mathcal{D}(f)$, randa til $\mathcal{D}(f)$). For å finne eventuelle ekstremalverdier på randa må man eventuelt parametrisere randa.

<u>Eksempel</u> (13.2.5)

La $f(x,y) := xy - x^3y^2$. Finn ~~maksverdien~~ til f over

$$\mathcal{D}(f) := \{(x,y) : 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1\}.$$

<u>Singulærp.</u>: f har ingen singulærpunkter.

~~Randpunkter:~~

<u>Kritiske punkter</u>: Vi har

$$\nabla f(x,y) = (y - 3x^2y^2, \ x - 2x^3y) = (y(1-3x^2y), \ x(1-2x^2y)),$$

så om $\nabla f(x,y) = \vec{0}$ må enten

1) $y = 0, \ x = 0$
2) $y = 0, \ 1-2x^2y = 0$ (men da er $1-2x^2y = 1-0 = 1 \neq 0$)
3) $1-3x^2y = 0, \ x = 0$ (men da er $1-3x^2y = 1-0 = 1 \neq 0$)
4) $1-3x^2y = 0, \ 1-2x^2y = 0$ (men da må både $x^2y = \frac{1}{3}$ og $x^2y = \frac{1}{2}$)

Altså har f kun krit. punkt i $(0,0)$, der

$$f(0,0) = 0.$$

Randpunkter: Vi ser etter maksima langs linjene $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$:

1) $\underline{x=0}$: $f(0,y)=0$

2) $\underline{x=1}$: $f(1,y)=y-y^2$, som har makspunkt der

$$0=\frac{d}{dy}\left(f(1,y)\right)=1-2y \iff \underline{y=1/2}. \text{ Her er}$$

$$f(1,1/2)=1/2-1/4=\underline{1/4}$$

3) $\underline{y=0}$: $f(x,0)=0$

4) $\underline{y=1}$: $f(x,1)=x-x^3$, som har makspunkt der

$$0=\frac{d}{dx}\left(f(x,1)\right)=1-3x^2 \iff x=\frac{1}{\sqrt{3}}. \text{ Her er}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},1\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{(\sqrt{3})^3}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3\sqrt{3}}\approx 0.385.$$

Altså har f makspunkt i $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},1\right)$, med verdi $\underline{\underline{\frac{2}{3\sqrt{3}}}}$.

13.3 Lagranges multiplikatormetode

Framgangsmåten i forrige kapittel kan brukes til å løse problemer på formen

$$\text{maksimer } f(\vec{x}) \text{ under bibetingelsen } g(\vec{x}) \leq C.$$

Her vil da $D(f) = \{\vec{x} : g(\vec{x}) \leq C\}$, og problemet er å maksimere f over $D(f)$.

Vi ser nå på problemer på formen

$$\text{maksimer } f(x,y) \text{ under bibetingelsen } g(x,y) = C.$$

Bibetingelsen $g(x,y)=C$ beskriver en kurve, og vi vil maksimere f over denne kurva.

Anta nå at $f, g \in C^1$, at f har en ekstremalverdi i et punkt $\vec{p}$, og at $g(\vec{p})=C$ og $\nabla g(\vec{p}) \neq \vec{0}$. Da har Lagrange-funksjonen

$$L(x,y,\lambda) := f(x,y) + \lambda(g(x,y) - C)$$

et kritisk punkt i $(x,y) = \vec{p}$.

<u>Eksempel</u>: (13.3.1) Maksimer x^3y^5 under bibetingelsen $x+y=8$.

La $f(x,y) = x^3y^5$ og $g(x,y) = x+y$. Vi vil maksimere $f(x,y)$ over de (x,y) s.a. $g(x,y)=8$. Definer Lagrange-funk.

$$L(x,y,\lambda) := f(x,y) + \lambda(g(x,y) - 8)$$
$$= x^3y^5 + \lambda(x+y-8).$$

Da er $\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) = 3x^2y^5 + \lambda$, $\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) = 5x^3y^4 + \lambda$,

$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = x+y-8$. I et kritisk punkt for L vil alle disse være lik 0:

$$3x^2y^5 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -3x^2y^5$$

$$0 = 5x^3y^4 + \lambda = 5x^3y^4 - 3x^2y^5 = x^2y^4(5x-3y)$$

$\Rightarrow$ $\underline{x=0}$, $\underline{y=0}$ eller $\underline{x = \frac{3}{5}y}$

$$x+y-8=0$$

$\Rightarrow$ $x=0$ og $y=8$, der $f(0,8)=0$

$y=0$ og $x=8$, der $f(8,0)=0$

eller $\frac{3}{5}y + y - 8 = 0 \Leftrightarrow y=5,\ x=3,$

der $\underline{f(3,5) = 3^3 \cdot 5^5}$.

Av disse er f størst i $(x,y)=(3,5)$, der $f(x,y) = \underline{\underline{27 \cdot 25 \cdot 225}}$

Vi kan også bruke Lagranges metode for å ~~finne ekstrem~~ løse problemer på formen

maksimer $f(x,y,z)$ under tilbetingelsene $\begin{cases} g(x,y,z) = 0 \\ h(x,y,z) = 0 \end{cases}$.

Definer da Lagrange-funksjonen

$$L(x,y,z,\lambda,\mu) := f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) + \mu h(x,y,z)$$

og finn kritiske punkter for L.

Eksempel (13.3.15): Finn maksima og minima av

$$f(x,y,z) := 4 - z$$

når $x^2+y^2-8=0$ og $x+y+z-1=0$.

Vi definerer lagrangefunk.

$$L(x,y,z,\lambda,\mu) := (4-z)+\lambda(x^2+y^2-8)+\mu(x+y+z-1).$$

Da er

$$\nabla L(x,y,z,\lambda,\mu) = \left(2x\lambda+\mu,\ 2y\lambda+\mu,\ -1+\mu,\ x^2+y^2-8,\ x+y+z-1\right).$$

Dersom $\nabla L(x,y,z,\lambda,\mu) = \vec{0}$ må $\mu = 1$, så

$$2x\lambda+1=0, \quad 2y\lambda+1=0.$$

$x\lambda$ og $y\lambda$ kan ikke være lik 0, så

$$\lambda = -\frac{1}{2x} \implies -\frac{2y}{2x}+1=0 \iff x=y.$$

Da får vi

$$0 = x^2+y^2-8 = 2x^2-8 \iff x = \pm 2.$$

Videre er $0 = x+y+z-1 = 2x+z-1$, så $z = 1-2x$.

Om $x=y=-2$ er $z=5$, og $f(-2,-2,5) = 4-5 = -1$.

Om $x=y=2$ er $z=-3$, og $f(2,2,-3) = 4+6 = 7$.

Altså har f maks. i $\underline{\underline{(2,2,-3)}}$, der $f(2,2,-3) = \underline{\underline{7}}$,

og min. i $\underline{\underline{(-2,-2,5)}}$, der $f(-2,-2,5) = \underline{\underline{-1}}$

$\blacksquare$

Eks. (13.3.11) Finn avstanden fra origo til flaten $xy^2z^4 = 32$.

Vi vil minimere avstanden $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ under bibet. $xy^2z^4 - 32 = 0$.

Dette er det samme som å minimere $x^2+y^2+z^2$. Vi definerer

$$L(x,y,z,\lambda) := x^2+y^2+z^2 + \lambda(xy^2z^4 - 32).$$

Da er

$$\nabla L(x,y,z,\lambda) = \left(2x + \lambda y^2 z^4,\ 2y + 2\lambda xyz^4,\ 2z + 4\lambda xy^2z^3,\ xy^2z^4 - 32\right).$$

Vi får $0 = 2y + 2\lambda xyz^4 = 2y(1+\lambda xz^4)$, så enten er $y = 0$ (som ikke ligger på flaten $xy^2z^4 = 32$), eller så er $1 + \lambda xz^4 = 0$, eller $\underline{\lambda = -\frac{1}{xz^4}}$. Da blir

$$0 = 2x + \lambda y^2 z^4 = 2x - \frac{y^2z^4}{xz^4} = 2x - \frac{y^2}{x} \iff \underline{2x^2 = y^2}.$$

~~Når vi~~ Videre blir

$$0 = 2z + 4\lambda xy^2z^3 = 2z - \frac{4}{xz^4} \cdot 2x^2z^3 = 2\left(z - \frac{4x}{z}\right)$$

$\iff \underline{z^2 = 4x}$. Til slutt er

$$0 = xy^2z^4 - 32 = x \cdot 2x^2 \cdot 16x^2 - 32 = 32(x^4 - 1)$$

$\Rightarrow x = \pm 1$.

- Om $x = -1$ ~~er $y = \pm\sqrt{2}$~~ kan ikke $z^2 = 4x < 0$
- Om $x = 1$ er $z^2 = 4 \Rightarrow z = \pm 2,\ y = \pm\sqrt{2}$.

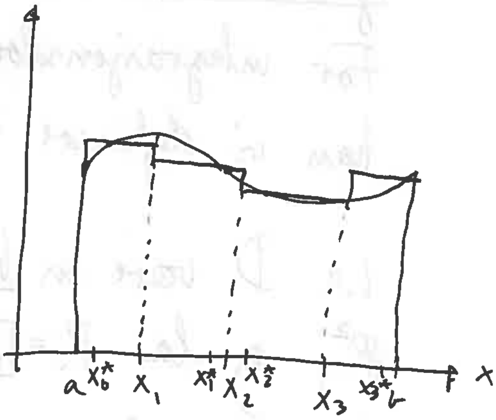
Alle disse punktene ligger på flata, og avstanden fra origo er

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{1^2 + 2 + 4} = \underline{\sqrt{7}}$$

Maple: implicitplot3d(xy²z⁴-32, x=-2..2, y=-2..2, z=-4..4, grid=[30,30,30]);

14.1 Dobbeltintegraler

For å integrere en funk. $f(x)$ over $x \in [a,b]$, partisjonerer vi $[a,b]$ inn i intervaller $[x_i, x_{i+1}]$, der $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$, velger punkter $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ og approksimerer med <u>Riemann-summen</u>



$$R(f,P) := \sum_{i=1}^{m} f(x_i^*)\Delta x_i ,$$

der $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$ og P betegner partisjonen $[x_0, x_1], \dots, [x_{m-1}, x_m]$ av $[a,b]$. Vi sier at f er <u>integrerbar</u> om

$$I := \lim_{\|P\| \to 0} R(f,P), \qquad \|P\| := \max_i (x_i - x_{i-1})$$

eksisterer og er uavhengig av valg av $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$.

For $f(x,y)$ velger vi en partisjon P av domenet $[a,b] \times [c,d]$ på formen $R_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ $(i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n)$, velger $(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \in R_{ij}$ og definerer

$$R(f,P) := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A_{ij} ,$$

der $\Delta A_{ij} = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$. Vi sier at f er integrerbar om

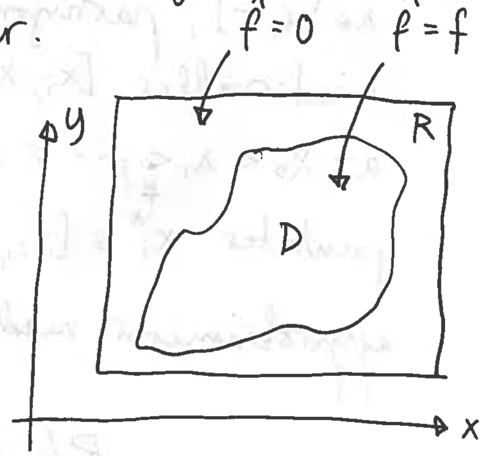
$$I := \lim_{\|P\| \to 0} R(f,P) , \qquad \|P\| := \max_{i,j} \left(|x_i - x_{i-1}| + |y_j - y_{j-1}| \right)$$

eksisterer og er uavhengig av valget av x_{ij}^*. Vi skriver

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\, dA = I \qquad \text{(<u>dobbeltintegralet</u> til } f\text{)}$$

Generelle domener D

For integrasjonsdomener D som ikke er rektangler kan vi definere integralet som følger.



La D være en begrenset mengde i $\mathbb{R}^2$, og la $R=[a,b]\times[c,d]$ være et rektangel s.a. $D\subset R$. Definer

$$\hat{f}(x,y) := \begin{cases} f(x,y) & \text{om } (x,y)\in D \\ 0 & \text{om } (x,y)\notin D. \end{cases}$$

Da er integralet til f ~~d~~ over D definert som

$$\iint_D f(x,y)\,dA := \iint_R \hat{f}(x,y)\,dA.$$

Teorem

Dersom f er en kontinuerlig funksjon på en lukket, begrenset mengde D hvis rand består av endelig mange kurver med endelig lengde, så er f integrerbar.

Egenskaper ved dobbeltintegralet

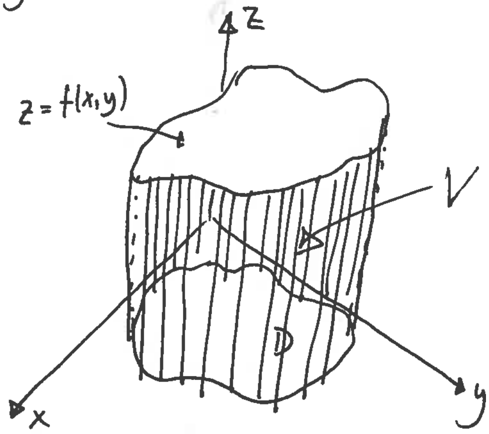
La f og g være integrerbare på $D \subset \mathbb{R}^2$. Da er:

(i) $\iint_D f(x,y)\,dA = 0$ om D har areal lik 0

(ii) Om $f(x,y) \geq 0$ på D er $\iint_D f(x,y)\,dA = V$, der V er volumet til området

$$\{(x,y,z) : 0 \leq z \leq f(x,y)\}$$

(området under grafen til f)



(iii) Om $f(x,y) \leq 0$ på D er

$\iint_D f(x,y)\,dA = -V$, der V er volumet mellom D og grafen til f.

(iv) $\iint_D 1\,dA =$ (arealet til D)

(v) Om $L, M \in \mathbb{R}$ er

$$\iint_D \big(Lf(x,y) + Mg(x,y)\big)\,dA = L\iint_D f(x,y)\,dA + M\iint_D g(x,y)\,dA$$

(integralet er lineært)

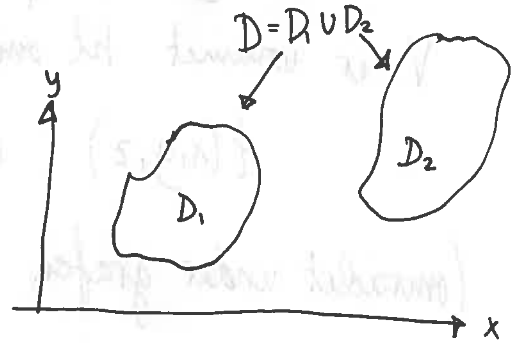
(vi) Om $f(x,y) \leq g(x,y)$ på D er $\iint_D f(x,y)\,dA \leq \iint_D g(x,y)\,dA$

(integralet er <u>monotonitetsbevarende</u>)

(vii) $\left| \iint_D f(x,y)\,dA \right| \leq \iint_D |f(x,y)|\,dA$ (trekantulikheten)

(viii) Om D_1 og D_2 ikke overlapper og $D = D_1 \cup D_2$, så er

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D_1} f(x,y)\,dA + \iint_{D_2} f(x,y)\,dA$$

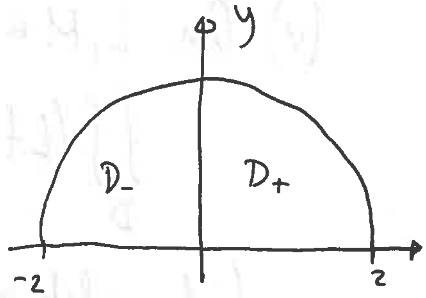


Eks.: (14.2.13) Finn $\iint_R dA$, der $R = [-1,3] \times [-4,1]$.

Eks.: (14.2.14) Finn $\iint_D (x+3)\,dA$, der $D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$

Vi har $\iint_D (x+3)\,dA = \iint_D x\,dA + \iint_D 3\,dA$. Volumet over $f(x,y) = x$ i D_- er det samme som under f i D_+, der

$D_- = \{(x,y) \in D : y < 0\}$, $D_+ = \{(x,y) \in D : y > 0\}$.



Altså er

$$\iint_D x\,dA = \iint_{D_-} x\,dA + \iint_{D_+} x\,dA$$

$$= \left(-\iint_{D_+} x\,dA\right) + \iint_{D_+} x\,dA = 0.$$

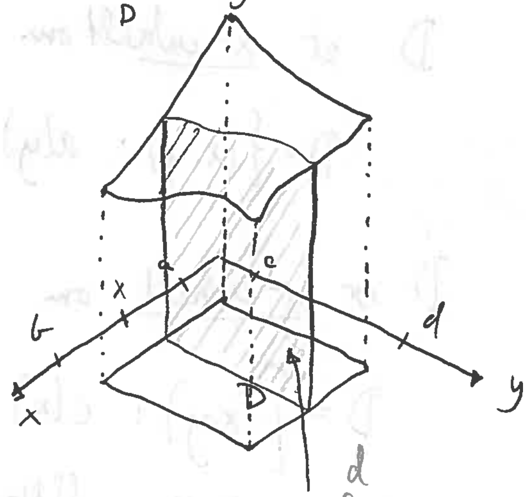
Videre er $\iint_D 3\,dA = 3 \cdot \iint_D dA = 3 \cdot (\text{arealet til } D) = 3 \cdot \frac{\pi \cdot 2^2}{2} = \underline{6\pi}$.

Altså er $\iint_D (x+3)\,dA = \underline{\underline{6\pi}}$

14.2 Itererte dobbeltintegraler

Når domenet D er et rektangel, $D = [a,b]\times[c,d]$ er det spesielt enkelt å evaluere integralet $\iint_D f(x,y)\,dA$.

Ved å holde f.eks. $x \in [a,b]$ fast kan vi finne arealet $A(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$. Da er



$$A(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$$

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

$$= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

Vi skriver derfor $\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$.

<u>Eksempel</u>: Finn $\iint_D x^2+3y\,dA$ når $D = [1,2]\times[3,5]$.

Vi har

$$\iint_D x^2+3y\,dA = \int_1^2 \int_3^5 x^2+3y\,dy\,dx = \int_1^2 \left[x^2 y + \frac{3y^2}{2} \right]_{y=3}^5 dx$$

$$= \int_1^2 2x^2 + \frac{75}{2} - \frac{27}{2}\,dx = \left[\frac{2x^3}{3} + \frac{49}{2}x \right]_{x=1}^2 = \frac{16}{3} - \frac{2}{3} + \frac{49}{2}$$

$$= \underline{\frac{14}{3} + \frac{49}{2}}$$

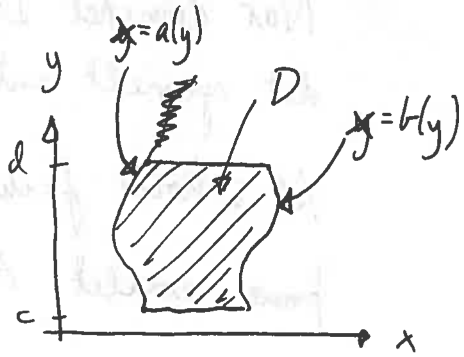
$\square$

Integralet $\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$ er et <u>iterert integral</u>

Vi kan generalisere dette til integrasjonsområder som er <u>x-enkle</u> og <u>y-enkle</u>:

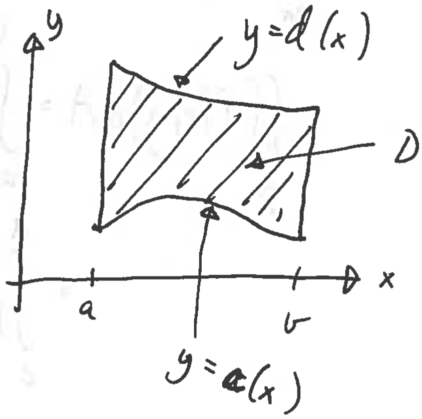
D er <u>x-enkelt</u> om det er på formen

$$D = \{(x,y) : a(y) \le x \le b(y),\ c \le y \le d\}$$



D er <u>y-enkelt</u> om

$$D = \{(x,y) : c(x) \le y \le d(x),\ a \le x \le b\}$$



Om D er x-enkelt, er $\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx\,dy$

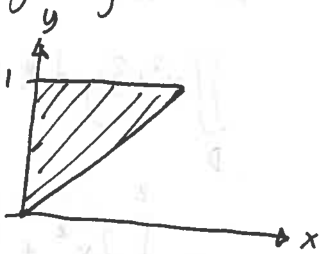
Om D er y-enkelt, er $\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy\,dx$.

<u>Eksempel 14.2.2</u>: Integrer $\int_0^1 \int_0^y (xy+y^2)\,dx\,dy$.

Her er ~~domenet~~ $D = \{(x,y) : 0 \le x \le y,\ 0 \le y \le 1\}$. Vi får

$$\int_0^1\int_0^y (xy+y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}y + y^2x\right]_{x=0}^{y} dy = \int_0^1 \frac{y^3}{2} + y^3\,dy$$

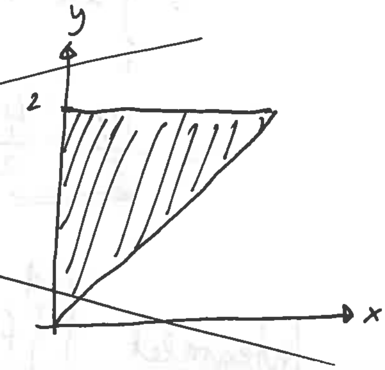
$$= \int_0^1 \frac{3y^3}{2}\,dy = \left[\frac{3y^4}{8}\right]_{y=0}^{1} = \underline{\underline{\frac{3}{8}}}$$



~~Eksempel~~ <u>14.2.4</u>: Beregn $\int_0^2 \int_0^y y^2 e^{xy}\,dx\,dy$.

Her er $D = \{(x,y) : 0 \le x \le y,\ 0 \le y \le 2\}$

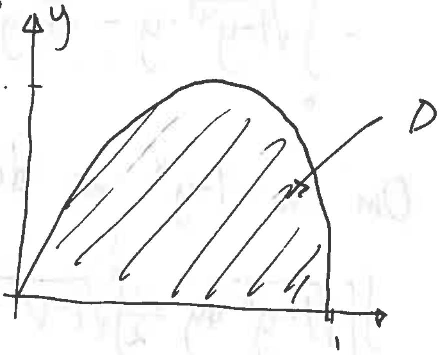
$$= \{(x,y) : x \le y \le 2,\ 0 \le x \le 2\}$$



~~Siden integralet i x er vrient å evaluere~~

Eksempel (14.2.10): Beregn $\iint_D x\cos y\, dA$, der D er domenet i første kvadrant begrenset av koord. aksene og $y = 1-x^2$.

Vi har $D = \{(x,y) : 0 \le y \le 1-x^2,\ 0 \le x \le 1\}$.



Då blir

$$\iint_D x\cos y\, dA = \int_0^1 \int_0^{1-x^2} x\cos y\, dy\, dx$$

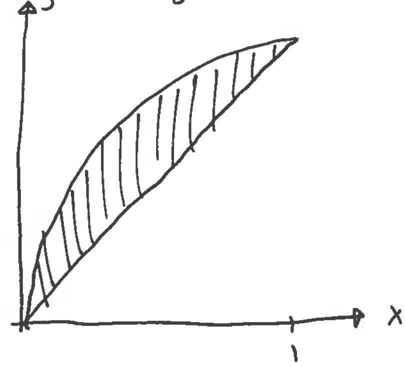
$$= \int_0^1 \Big[x\sin y\Big]_{y=0}^{1-x^2} dx = \int_0^1 x\sin(1-x^2)\, dx \qquad \left(u = 1-x^2,\ du = -2x\, dx\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\int_1^0 \sin(u)\, du = -\frac{1}{2}\Big[-\cos u\Big]_{u=1}^{0} = \frac{\cos 0 - \cos 1}{2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1-\cos 1}{2}}}$$

$\square$

Eksempel 14.2.18: Skisser ~~integrasjonsområdet~~ og evaluer integralet $\int_0^1 \int_x^{x^{1/3}} \sqrt{1-y^4}\, dy\, dx$.



Vi har

$$D = \{(x,y) : x \le y \le x^{1/3},\ 0 \le x \le 1\}$$

$$= \{(x,y) : y^3 \le x \le y,\ 0 \le y \le 1\}$$

(hvis $y \le x^{1/3}$ er $y^3 \le x$). ~~og om $x \le$~~ Altså er

$$\iint_D \sqrt{1-y^4}\,dy = \int_0^1 \int_{y^3}^{y} \sqrt{1-y^4}\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\sqrt{1-y^4}\,x\right]_{x=y^3}^{y} dy$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1-y^4}\cdot y - \sqrt{1-y^4}\,y^3\,dy$$

Om $u = 1-y^4$ er $du = -4y^3\,dy$, og om $v = y^2$ er $dv = 2y\,dy$, så

$$\iint_D \sqrt{1-y^4}\,dy = \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1-v^2}\cdot dv}_{\text{arealet av en halvsirkel}} - \int_1^0 \left(-\frac{1}{4}\right)\sqrt{u}\,du$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\int_0^1 \sqrt{u}\,du = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_{u=0}^{1} = \underline{\underline{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6}}}$$

14.3 Uekte integralet og en middelverdisetning

Et integral $\iint_D f(x,y)\,dA$ er <u>uekte</u> om D er ubegrenset eller om f er ubegrenset. Om <u>f er positiv</u> (eller negativ) kan vi da iterere integralet og evaluere de uekte integralene som dukker opp.

Om f både tar positive og negative verdier kan man vise at det uekte integralet $\iint_D f(x,y)\,dA$ konvergerer dersom $\iint_D |f(x,y)|\,dA$ konvergerer. Isåfall er integralet <u>absolutt konvergent</u>.

<u>Eksempel</u>: (14.3.2) Avgjør om integralet $\iint_Q \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}\,dA$ konvergerer.

Integranden er ikke-negativ over $Q := \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0\}$.

Vi har

$$\iint_Q \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}\,dA = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2} \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx\,dy$$

$$= \left(\int_0^\infty \frac{1}{1+y^2}\,dy\right) \cdot \left(\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx\right).$$

Vi har $\int_0^\infty \frac{1}{1+y^2}\,dy = \lim_{r\to\infty} \int_0^r \frac{1}{1+y^2}\,dy = \lim_r \Big[\arctan y\Big]_{y=0}^r$

$$= \lim_r (\operatorname{atan} r - \operatorname{atan} 0) = \frac{\pi}{2}.$$

Altså er $\iint_Q \dots\, dA = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{4}}}$

14.3.9 Finn $\iint_T \frac{e^{-y/x}}{x^3}\,dA$, der $T=\{(x,y): x\geq 1,\ 0\leq y\leq x\}$.

$$\iint_T \frac{e^{-y/x}}{x^3}\,dA = \int_1^\infty\int_0^x \frac{e^{-y/x}}{x^3}\,dy\,dx = \int_1^\infty \left[-\frac{e^{-y/x}}{x^2}\right]_{y=0}^{x} dx$$

$$= \int_1^\infty \frac{1-e^{-1}}{x^2}\,dx = (1-e^{-1})\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = (1-e^{-1})\lim_{r\to\infty}\int_1^r \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= (1-e^{-1})\lim_{r\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_{x=1}^{r} = (1-e^{-1})\lim_{r}\left(1-\frac{1}{r}\right) = \underline{\underline{1-e^{-1}}} \approx 0.7$$

Et middelverditeorem

La D være et lukket, begrenset område og la $f(x,y)$ være kontinuerlig på D. Da er det $(x_1,y_1), (x_2,y_2)\in D$ slik at

$$f(x_1,y_1) \leq f(x,y) \leq f(x_2,y_2) \quad \forall\ (x,y)\in D.$$

La $A := \iint_D dA$, arealet til D. Da er

$$f(x_1,y_1)A = \iint_D f(x_1,y_1)\,dA \leq \iint_D f(x,y)\,dA \leq \iint_D f(x_2,y_2)\,dA = f(x_2,y_2)A.$$

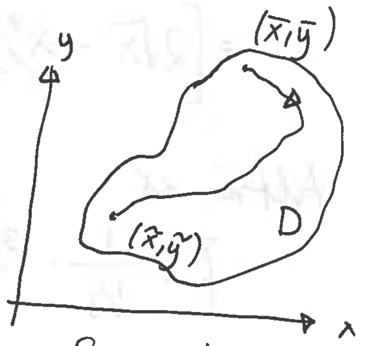
Om vi deler på A og definerer $\bar{f} := \frac{1}{A}\iint_D f(x,y)\,dA$ får vi

$$f(x_1,y_1) \leq \bar{f} \leq f(x_2,y_2).$$

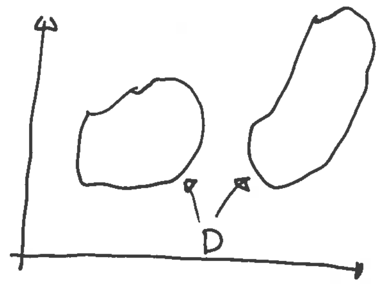
Anta nå at D er <u>sammenkoblet</u>, dvs. at ~~for~~ ~~enhver~~ ethvert par av punkter $(\bar{x},\bar{y})$, $(\tilde{x},\tilde{y})$ kan kobles med en kurve i D, dvs det finnes $x(t), y(t)$ for $t \in [0,1]$ slik at

$$(x(0), y(0)) = (\bar{x}, \bar{y}), \quad (x(1), y(1)) = (\tilde{x}, \tilde{y})$$

og $(x(t), y(t)) \in D$ for alle t.



Sammenkoblet



Ikke sammenkoblet

Teorem

Anta nå at D er sammenkoblet. Da ~~må det~~ finnes $(x_0, y_0) \in D$ slik at

$$f(x_0, y_0) = \bar{f}.$$

$\square$

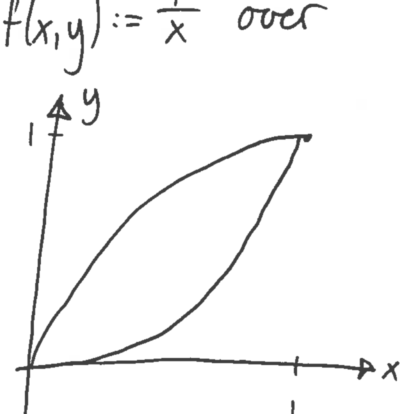
Def:

Middelverdien til f i D er definert som

$$\bar{f} := \frac{1}{\text{areal}(D)} \iint_D f(x,y)\, dA.$$

Eksempel (14.3.24) Finn middelverdien til $f(x,y) := \frac{1}{x}$ over

$$D := \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$



Vi finner først arealet til D:

$$\text{areal}(D) = \iint_D dA = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy\, dx = \int_0^1 \sqrt{x} - x^2\, dx$$

$$= \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{1}{3} x^3\right]_{x=0}^{1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \underline{\frac{1}{3}}$$

Videre er

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{1}{x}\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\frac{y}{x}\right]_{x=x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} - x\,dx$$

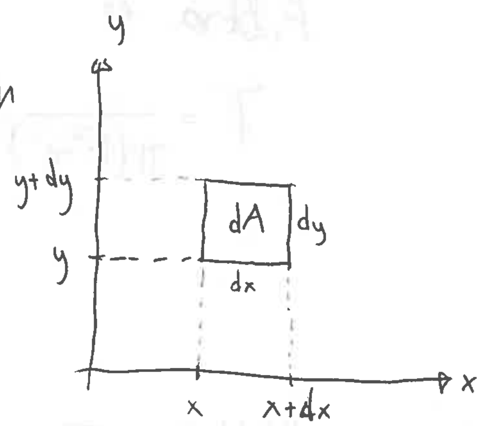
$$= \left[2\sqrt{x} - x^2/2\right]_{x=0}^{1} = 2 - 1/2 = 3/2 .$$

Altså er

$$\bar{f} = \frac{1}{1/3} \cdot 3/2 = \underline{\underline{9/2}}$$ $\square$

14.4 Variabelskifte

I definisjonen av integralet summerer vi opp funksjonsverdiene over små arealelementer dA. Uttrykt i Kartesiske koordinater vil disse ha areal

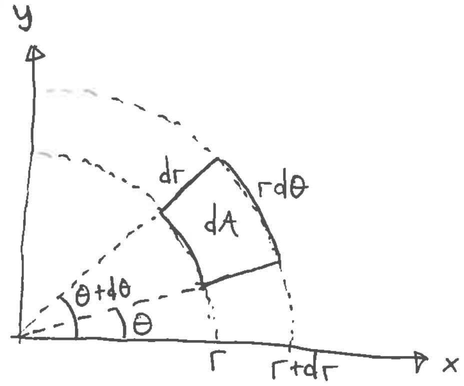


$$dA = dx\,dy.$$

Dette leder til det itererte integralet i Kartesiske koordinater.

Vi kunne like godt uttrykt dA i polarkoordinater:

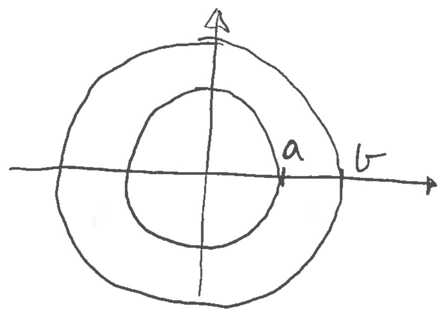
$$dA = r\,d\theta\,dr.$$



Vi har dermed gjort et <u>variabelskifte</u> i dobbeltintegralet, fra Kartesiske koord. til polarkoord.

<u>Eksempel</u> (14.4.16)

Finn middelverdien til $f(x,y) := e^{-(x^2+y^2)}$ over $D := \{(x,y) : a \le \sqrt{x^2+y^2} \le b\}$ (der $0 < a < b$).



Vi har $\text{areal}(D) = \pi b^2 - \pi a^2 = \pi(b^2 - a^2)$.

Vi skriver

$$f(x,y) = f(r,\theta) = e^{-r^2}.$$

~~Da blir~~ Merk at $D = \{(r,\theta) : a \le r \le b\}$. Da blir

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_0^{2\pi}\int_a^b e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_{a^2}^{b^2} e^{-s}\frac{ds}{2}\,d\theta \qquad (s = r^2)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[-e^{-s}\right]_{s=a^2}^{b^2} d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{-a^2} - e^{-b^2}\,d\theta = \frac{2\pi}{2}\left(e^{-a^2} - e^{-b^2}\right)$$

Altså er

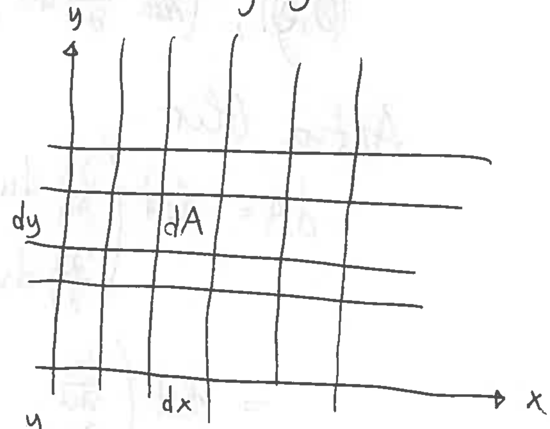
$$\bar{f} = \frac{1}{\pi(b^2-a^2)} \cdot \pi\left(e^{-a^2}-e^{-b^2}\right) = \underline{\underline{\frac{e^{-a^2}-e^{-b^2}}{b^2-a^2}}}$$

<u>14.4.8</u> Finn $\iint_Q x+y \, dA$, der $Q = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq a\}$.

Generelle variabelskifte

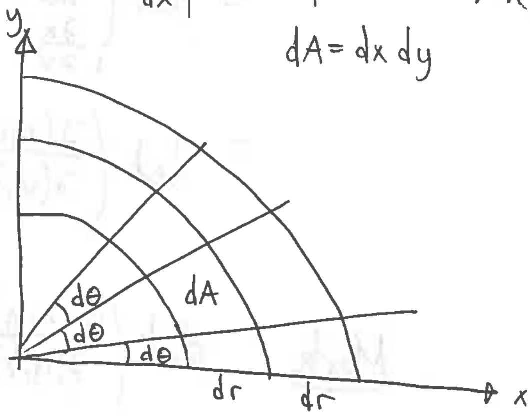
Vi ser nå på et generelt variabelskifte $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$.

Tegn linjene $x = \text{konst.}$, $y = \text{konst.}$



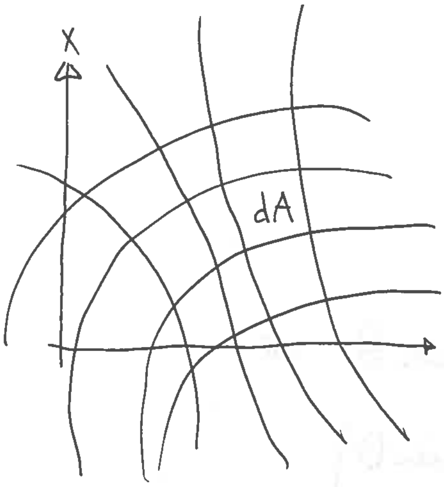
$dA = dx\,dy$

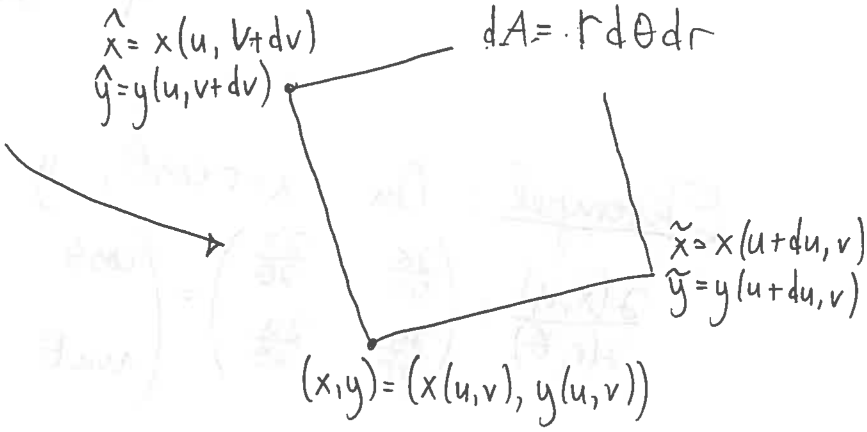
I polarkoordinater er de tilsvarende linjene $r = \text{konst.}$, $\theta = \text{konst.}$



$dA = r\,d\theta\,dr$

For ~~de~~ generelle variable (u,v) blir tilsvarende ~~lin~~ kurver $u = \text{konst.}$ $v = \text{konst.}$





Her er

$$\tilde{x} = x(u+du, v) = x(u,v) + \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\,du + \cdots$$

$$\approx x + \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\,du\,,$$

$$\tilde{y} \approx y + \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\,du\,,$$

$$\hat{x} \approx x + \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\,dv\,, \qquad \hat{y} \approx y + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv\,.$$

Vi har altså et parallellogram med koordinater

$(0,0)$, $\left(\frac{\partial x}{\partial u}du, \frac{\partial y}{\partial u}du\right)$, $\left(\frac{\partial x}{\partial v}dv, \frac{\partial y}{\partial v}dv\right)$, ...

Altså blir

$$dA = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}du & \frac{\partial y}{\partial u}du \\ \frac{\partial x}{\partial v}dv & \frac{\partial y}{\partial v}dv \end{pmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}du\frac{\partial y}{\partial v}dv - \frac{\partial y}{\partial u}du\frac{\partial x}{\partial v}dv$$

$$= \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} du\,dv$$

$$= \det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) du\,dv.$$

Merk: $\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) = \frac{1}{\det\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)}$

Eksempel: Om $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ er

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix},$$

så

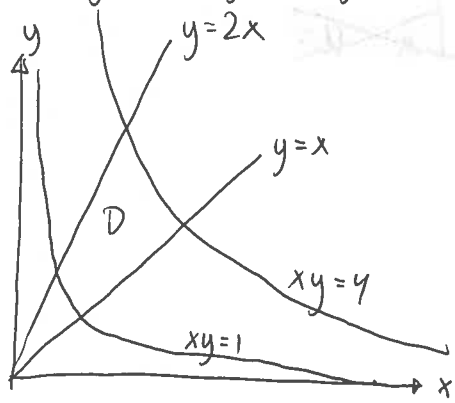
$$dA = \det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right) dr\,d\theta = \left(r\cos^2\theta + r\sin^2\theta\right) dr\,d\theta = r\,dr\,d\theta.$$

Teorem:
La $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, der $x(u,v)$ og $y(u,v)$ er kont. deriverbare og $\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) \neq 0$ for $(u,v) \in S$. La $D = \{(x(u,v), y(u,v)) : (u,v) \in S\}$.
Da er

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S f\left(x(u,v), y(u,v)\right)\left|\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\right| du\,dv.$$

(14.4.33)

Eksempel: Finn arealet til D gitt ved (x,y) i første kvadrant mellom kurvene $xy=1$, $xy=4$, $y=x$, $y=2x$.



$y=x$ og $y=2x$ kan skrives som $\frac{y}{x}=1$ og $\frac{y}{x}=2$.

Vi har altså

$$D=\{(x,y): 1\le y/x \le 2,\ 1\le xy\le 4\}.$$

Sett $u=y/x$, $v=xy$, så D svarer til

$$S=\{(u,v): 1\le u\le 2,\ 1\le v\le 4\}.$$

Vi har $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{pmatrix}-y/x^2 & 1/x\\ y & x\end{pmatrix}$, så

$$\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)=\frac{1}{\det\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)}=\frac{1}{\left(-y/x-y/x\right)}=-\frac{x}{2y}=-\frac{1}{2u}$$

Altså er

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\iint_S dA=\iint_S\left|-\frac{1}{2u}\right|du\,dv=+\frac{1}{2}\int_1^4\int_1^2\frac{1}{u}\,du\,dv$$

$$=+\frac{1}{2}\int_1^4\left[\ln(u)\right]_{u=1}^{2}dv=+\frac{1}{2}\int_0^1\ln 2\,dv=+\frac{3\ln 2}{2}$$

~~14.4.29~~ ~~La $D = \{(x,y,z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$~~

~~La u =~~

14.5 Trippelintegraler

For funksjoner $f(x,y,z)$ definert på $D \subset \mathbb{R}^3$ er trippelintegralet

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV$$

Definert akkurat som dobbeltintegralet. Her betegner $dV = dx\,dy\,dz$ volumelementet.

Om $f \equiv 1$ får vi

$$V = \iiint_D dV,$$

volumet til D.

Eksempel (14.5.1): Finn $\iiint_R (1+2x-3y)\,dV$, der $R = [-a,a] \times [-b,b] \times [-c,c]$.

Vi har $\iiint_R (1+2x-3y)\,dV = \underbrace{\iiint_R dV}_{=I_1} + 2\underbrace{\iiint_R x\,dV}_{=I_2} - 3\underbrace{\iiint_R y\,dV}_{=I_3}$.

Vi har $I_1 = \text{volum}(R) = 8abc$ og $I_2 = I_3 = 0$, siden x og y er odde funksjoner over det symmetriske domenet R.

$\Rightarrow \iiint_R (1+2x-3y)\,dV = \underline{8abc}$.

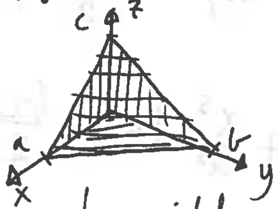
14.5.2 Finn $\iiint_B xyz\,dV$, der $B = [0,1]\times[-2,0]\times[1,4]$.

Vi har

$$\iiint_B xyz\,dV = \int_0^1\int_{-2}^0\int_1^4 xyz\,dz\,dy\,dx = \int_0^1\int_{-2}^0 xy\left(\int_1^4 z\,dz\right)dy\,dx$$

$$= \left(\int_0^1 x\,dx\right)\left(\int_{-2}^0 y\,dy\right)\left(\int_1^4 z\,dz\right) = \frac{1}{2}(-2)4 = \underline{\underline{-4}}$$

14.5.4 Finn $\iiint_R x\,dV$ over R begrenset av koord-planene og $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.



Vi skal ha $x,y,z \geq 0$. x, y og z kan ikke ha verdier større enn hhv. a, b og c, siden ~~høyre~~ venstre siden i $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ blir større enn 1. Vi har altså ~~$0\leq y\leq b$, $0\leq x\leq a$,~~ ~~$0\leq z\leq c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)$~~.

~~$0\leq z\leq c$, $0\leq x\leq a\left(1-\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)$~~ $0\leq y\leq b$,

$$\iiint_R x\,dV = \int_0^a\int_0^b\int_0^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)} x\,dz\,dy\,dx = \int_0^a\int_0^b xc\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)dy\,dx$$

$$= \int_0^a\int_0^b xc - \frac{xyc}{b} - \frac{x^2c}{a}\,dy\,dx = \int_0^a\left[xyc - \frac{xy^2c}{2b} - \frac{x^2yc}{a}\right]_{y=0}^{b} dx$$

$$= \int_0^a \frac{xbc}{2} - \frac{xbc}{2} - \frac{x^2bc}{a}\,dx = \frac{a^2bc}{4} - \frac{a^2bc}{4} - \frac{a^2bc}{3a}$$

~~$= a^2bc(6-3-4$~~

$$0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le b\left(1-\frac{x}{a}\right), \quad 0 \le z \le c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right).$$

$$\Rightarrow \iiint_R x\,dV = \int_0^a \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} \int_0^{c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})} x \, dz\,dy\,dx$$

$$= \int_0^a \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} xc - \frac{x^2c}{a} - \frac{xyc}{b} \, dy\,dx$$

$$= \int_0^a \left(xc - \frac{x^2c}{a}\right) b\left(1-\frac{x}{a}\right) - \frac{xc}{2b}\left(b\left(1-\frac{x}{a}\right)\right)^2 dx$$

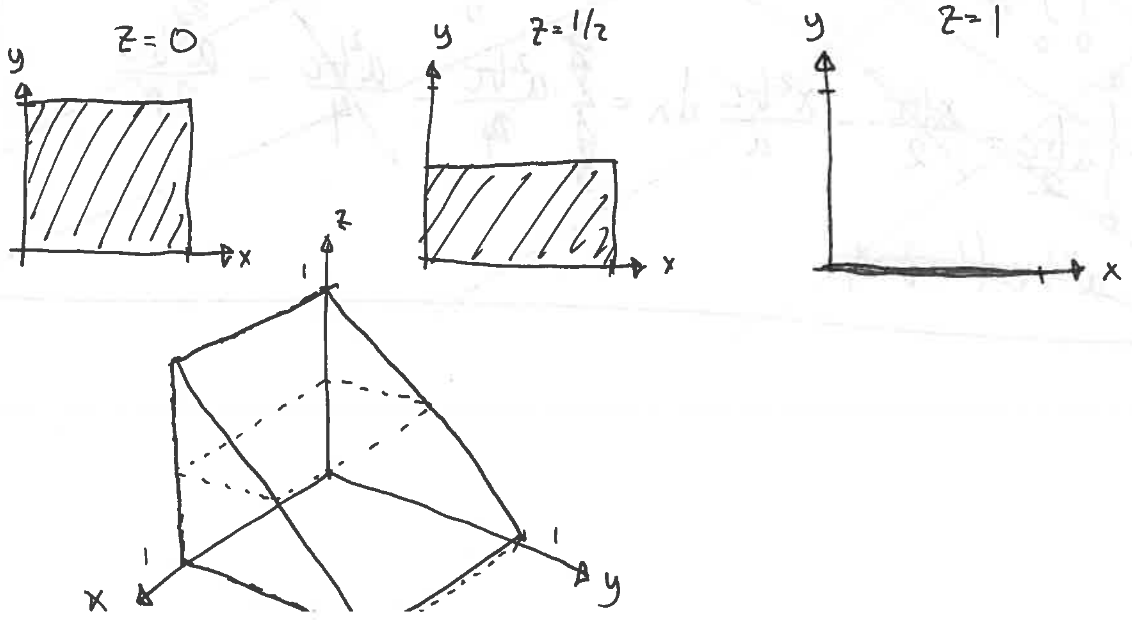
$$= \int_0^a xcb\left(1-\frac{x}{a}\right)^2 - \frac{xcb}{2}\left(1-\frac{x}{a}\right)^2 dx = \int_0^a \frac{1}{2}xcb\left(1-\frac{x}{a}\right)^2 dx$$

$$= \frac{bc}{2}\int_0^a x - \frac{2x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2}\,dx = \frac{bc}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3a} + \frac{x^4}{4a^2}\right]_{x=0}^{a}$$

$$= \frac{bc}{2}\left(\frac{a^2}{2} - \frac{2a^2}{3} + \frac{a^2}{4}\right) = \frac{a^2bc}{2}\left(\frac{6-8+3}{12}\right) = \underline{\underline{\frac{a^2bc}{24}}}$$

<u>14.5.17</u> Skriv $I := \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^1 f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ som et trippelintegral, skisser domenet og bytt om x og z.

Vi har $I = \iiint_D f(x,y,z)\,dV$, der $D = \{(x,y,z) : 0 \le z \le 1, \ 0 \le y \le 1-z, \ 0 \le x \le 1\}$.



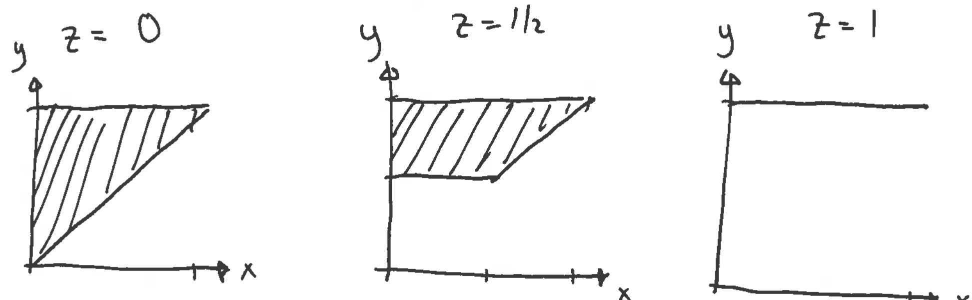
Vi kan skrive ~~D~~ I som

~~$D = \{(x,y,z) : 0 \le x \le 1,$~~

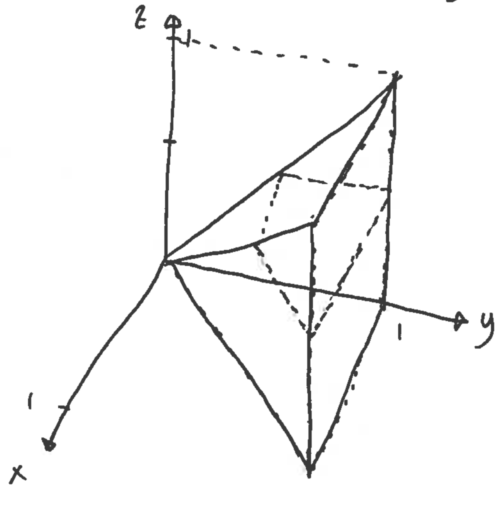
$$I = \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^1 f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx .$$

<u>14.5.18</u> $\displaystyle\int_0^1 \int_z^1 \int_0^y f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_D f(x,y,z)\, dV,$ der

$$D = \{(x,y,z) : 0 \le z \le 1,\ z \le y \le 1,\ 0 \le x \le y\}.$$



$0 \le y \le 1$, $0 \le x \le y$ $1/2 \le y \le 1$, $0 \le x \le y$ $1 \le y \le 1$, $0 \le x \le y$



Vi kan skrive D som

$$D = \{(x,y,z) : 0 \le x \le 1,\ x \le y \le 1,\ 0 \le z \le y\}.$$

14.6 Variabelskifte

Som i dobbeltintegraler kan vi gjøre variabelskifte i trippelint:

Om $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$, $z = z(u,v,w)$

er $dV = dx\,dy\,dz = \left|\det\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right)\right| du\,dv\,dw$.

(Merk: her skriver vi

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix},$$

boka bruker at $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ ~~er~~ determinanten til denne).

Determinanten til en 3x3-matrise ~~er~~ $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ er

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a\det\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b\det\begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c\det\begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}.$$

Eksempel: Om $(u,v,w) = (ax, by, cw)$ er

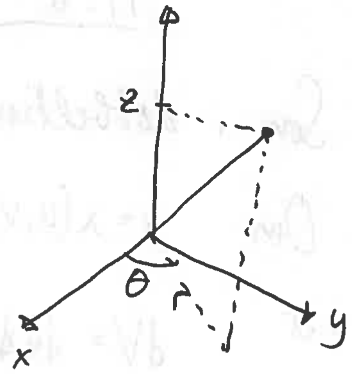
$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad \text{så} \quad \det\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right) = \frac{1}{\det(\ldots)} = \frac{1}{abc}.$$

Dermed er

$$dV = dx\,dy\,dz = \frac{1}{abc}\,du\,dv\,dw.$$

Sylinderkoordinater:

Her er $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = z$



Da blir

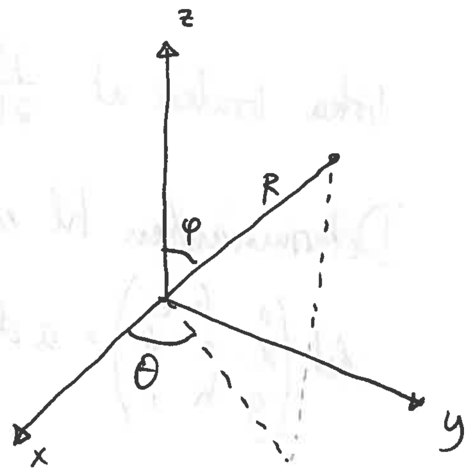
$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Derfor er $\det\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right) = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r,$

så

$$\underline{dV = r\,dr\,d\theta\,dz}.$$

~~Sfæriske~~ Kulekoordinater



Her er

$x = R\sin\varphi\cos\theta$

$y = R\sin\varphi\sin\theta$

$z = R\cos\varphi.$

Altså er

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(R,\varphi,\theta)} = \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta & R\cos\varphi\cos\theta & -R\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & R\cos\varphi\sin\theta & R\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -R\sin\varphi & 0 \end{pmatrix},$$

så

$$\det\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(R,\varphi,\theta)}\right) = \sin\varphi\cos\theta\left(R^2\sin^2\varphi\cos\theta\right) + R\cos\varphi\cos\theta\left(R\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta\right)$$

$$- R\sin\varphi\sin\theta\left(\underbrace{-R\sin^2\varphi\sin\theta - R\cos^2\varphi\sin\theta}_{= -R\sin\theta}\right)$$

$$= \cos^2\theta\sin\varphi R^2\left(\cancel{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}\right) + R^2\sin\varphi\sin^2\theta$$

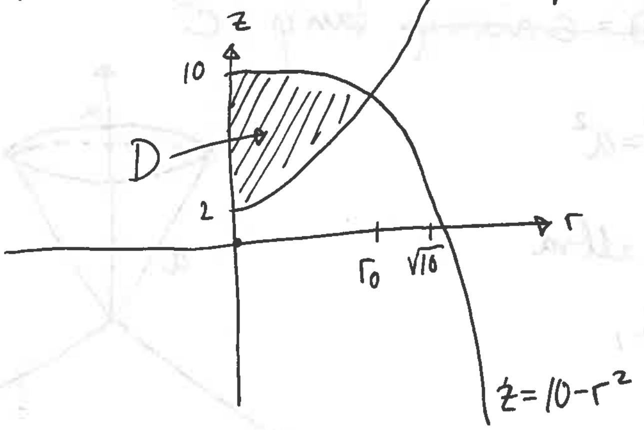
$$= R^2\sin\varphi.$$

Siden $\varphi \in [0,\pi]$ er $R^2 \sin\varphi \geq 0$. Vi får

$$\underline{dV = R^2 \sin\varphi \, dR \, d\varphi \, d\theta}$$

14.6.3 Finn volumet mellom paraboloidene $\begin{cases} z = 10 - x^2 - y^2, \\ z = 2(x^2+y^2-1). \end{cases}$

Vi bruker ~~kule~~ sylinderkoordinater: parab. blir $\begin{cases} z = 10 - r^2; \\ z = 2(r^2-1). \end{cases}$



r_0 er der $10 - r_0^2 = 2(r_0^2 - 1) \iff 3r_0^2 = 12 \iff r_0 = 2$

Vi får

$$\mathrm{vol}(D) = \iiint_D dV = \int_0^{2} \int_0^{2\pi} \int_{2(r^2-1)}^{10-r^2} dz \, d\theta \, dr = \int_0^{2} \int_0^{2\pi} \left(10 - r^2 - 2(r^2-1)\right) d\theta \, dr$$

$$= 2\pi \int_0^{2} 12 - 3r^2 \, dr = 2\pi \left[12r - r^3\right]_{r=0}^{2} = 2\pi(24 - 8) = \underline{\underline{32\pi}}$$

14.6.13 Finn $I := \iiint_R (x^2+y^2+z^2)\,dV$, der R er området

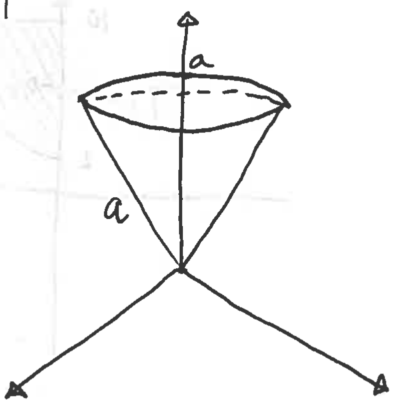
mellom $z = c\sqrt{x^2+y^2}$ og $x^2+y^2+z^2 = a^2$

Bruk kulekoordinater: $x = R\sin\varphi\cos\theta$, $y = R\sin\varphi\sin\theta$, $z = R\cos\varphi$. Da er

$$z = c\sqrt{x^2+y^2} \iff R\cos\varphi = c\sqrt{R^2\sin^2\varphi} = cR\sin\varphi$$

$$\iff \tan\varphi = c^{-1}$$

og $x^2+y^2+z^2=a^2 \iff R^2 = a^2$



Integrasjonsgrensene blir altså

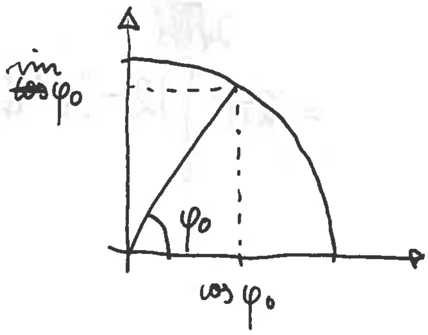
$0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le R \le a$,

$0 \le \varphi \le \tan^{-1} c^{-1} =: \varphi_0$

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\varphi_0}\int_0^{a} R^2 \cdot R^2 \sin\varphi \, dR\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\varphi_0} \frac{a^5}{5}\sin\varphi\, d\varphi\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{a^5}{5}\Big[-\cos\varphi\Big]_{\varphi=0}^{\varphi_0} d\theta$$

$$= \frac{2\pi a^5}{5}(1-\cos\varphi_0)$$



$$\tan\varphi_0 = \frac{\sin\varphi_0}{\cos\varphi_0} = c^{-1}$$

$$\Rightarrow \sin^2\varphi_0 + \cos^2\varphi_0 = (c^{-2}+1)\cos^2\varphi_0$$

$$\sin^2\varphi_0 + \cos^2\varphi_0 = 1$$

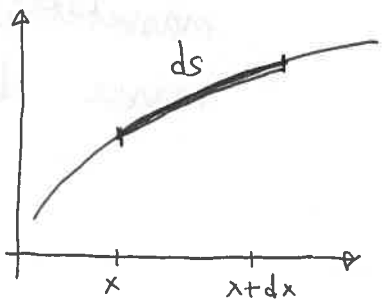
$$\Rightarrow \cos\varphi_0 = \sqrt{\frac{1}{1+c^{-2}}} = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$$

$$\Rightarrow I = \frac{2\pi a^5}{5}\left(1 - \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\right)$$

14.7 Anvendelser av multippelintegraler

Flateelementet til en graf

For funksjoner $f(x)$ av én variabel er buelengdeelementet ds gitt ved

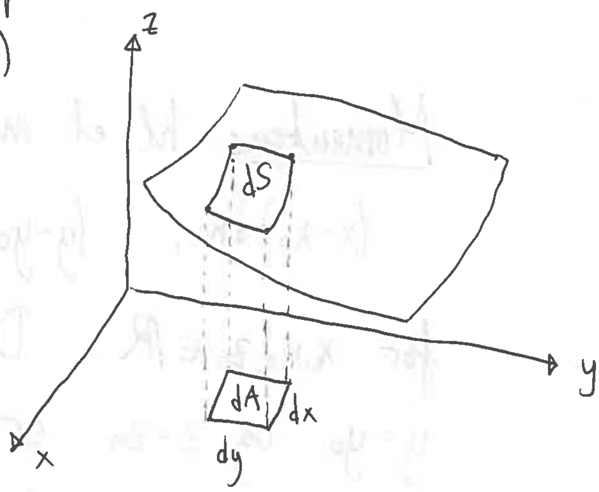


$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2}\, dx$$

Altså er buelengden til grafen til f

$$s = \int ds = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}(x)\right)^2}\, dx .$$

Tilsvarende kan det vises at <u>flateelementet</u> dS av grafen til en funksjon ~~av~~ $f(x,y)$ av to variable er gitt ved



$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

Altså er arealet S av grafen til f gitt ved

$$S = \int dS = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dA.$$

Momenter, masse og massesenter

La $D \subset \mathbb{R}^3$ representere et objekt med massetetthet ρ. Da ~~er~~ har hvert volumelement dV masse $dm = \rho\, dV$. Altså har objektet masse

$$m = \iiint_D \rho\, dV = \rho \cdot \text{volum}(D).$$

Mer generelt, hvis massetettheten varierer, $\rho = \rho(x,y,z)$, så er

$$m = \iiint_D \rho(x,y,z)\, dV.$$

<u>Momentene</u> til et masseelement dm er gitt ved

$$(x-x_0)\,dm, \quad (y-y_0)\,dm, \quad (z-z_0)\,dm$$

for $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$. Det totale momentet om planene $x=x_0$, $y=y_0$ og $z=z_0$ er gitt ved hhv.

$$M_{x=x_0} = \iiint_D (x-x_0)\rho(x,y,z)\, dV,$$

$$M_{y=y_0} = \iiint_D (y-y_0)\rho(x,y,z)\, dV,$$

$$M_{z=z_0} = \iiint_D (z-z_0)\rho(x,y,z)\, dV.$$

Ved å bruke lineariteten av integralet får vi

$$M_{x=x_0} = \iiint_D x\,\rho(x,y,z)\,dV - x_0 \iiint_D \rho(x,y,z)\, dV = M_{x=0} - m x_0,$$

$$M_{y=y_0} = M_{y=0} - m y_0, \quad M_{z=z_0} = M_{z=0} - m z_0.$$

Massesenteret til objektet er det punkt (x_0, y_0, z_0) der $M_{x=x_0} = M_{y=y_0} = M_{z=z_0} = 0$. Vi kan løse for x_0, y_0, z_0 og få

$$x_0 = \frac{M_{x=0}}{m} = \frac{\iiint_D x\,\rho(x,y,z)\,dV}{\iiint_D \rho(x,y,z)\,dV},$$

og tilsvarende $y_0 = \frac{M_{y=0}}{m}$, $z_0 = \frac{M_{z=0}}{m}$.

Om massetettheten er konstant, $\rho(x,y,z) \equiv \rho$, blir massesenteret

$$x_0 = \frac{\iiint_D x\rho\,dV}{\iiint_D \rho\,dV} = \frac{\rho\left(\iiint_D x\,dV\right)}{\rho\left(\iiint_D dV\right)} = \frac{\iiint_D x\,dV}{\iiint_D dV},$$

og tilsvarende for y_0, z_0. Merk at disse er uavhengige av ρ. Vi kaller dette punktet (x_0, y_0, z_0) for sentroiden til D.

Eksempel (14.7.13): Finn massen til en sfærisk planet med radius a og tetthet $\rho(R) = \frac{A}{B+R^2}$, der R er avstanden fra planetens sentrum.

Vi har $m = \iiint_D \frac{A}{B+R^2}\,dV$. I kulekoordinater er $dV = R^2 \sin\varphi\,dR\,d\varphi\,d\theta$, og $D = \{(x,y,z) : \sqrt{x^2+y^2+z^2} \le a\}$

$$= \{(R,\varphi,\theta) : R \le a, 0 \le \varphi \le \pi, 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

Altså er

$$m = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} \frac{AR^2 \sin\varphi}{B + R^2}\, dR\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\left(\int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi \right) \left(\int_0^{a} \frac{AR^2}{B+R^2}\, dR \right) \right) d\theta$$

$$= 2\pi \cdot \left[-\cos\varphi\right]_{\varphi=0}^{\pi} \cdot A \int_0^{a} \frac{R^2}{B+R^2}\, dR$$

$$= 4A\pi \int_0^{a} \frac{R^2}{B+R^2}\, dR .$$

Vi har $\int_0^{a} \frac{R^2}{B+R^2}\, dR = \int_0^{a} \frac{B+R^2-B}{B+R^2}\, dR = \int_0^{a} 1 - \frac{B}{B+R^2}\, dR$

$$= a - \int_0^{a} \frac{1}{1+\left(\frac{R}{\sqrt{B}}\right)^2}\, dR \qquad \left(s = \frac{R}{\sqrt{B}},\quad ds = \frac{dR}{\sqrt{B}} \right)$$

$$= a - \sqrt{B} \int_0^{a/\sqrt{B}} \frac{1}{1+s^2}\, ds = a - \sqrt{B}\left[\arctan s\right]_{s=0}^{a/\sqrt{B}}$$

$$= a - \sqrt{B}\arctan\left(a/\sqrt{B}\right).$$

Altså blir

$$m = 4A\pi\left(a - \sqrt{B}\arctan\left(a/\sqrt{B}\right)\right).$$

Siden funksjonene x, y og z er odde og D er symmetrisk om yz-, xz- og xy-planene, er

$$M_{x=0} = \iiint_D x\, dV = 0, \quad M_{y=0} = 0, \quad M_{z=0} = 0.$$

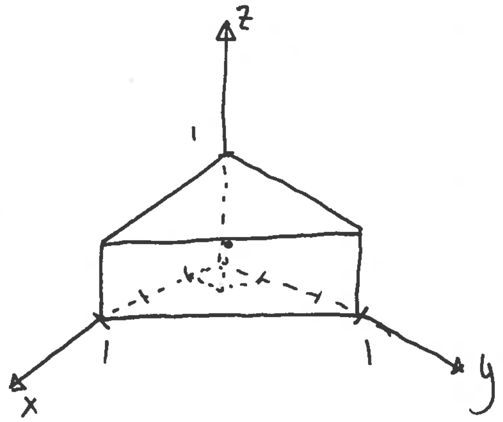
Altså er

$$(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0).$$

Eksempel (14.7.19): Finn sentroiden til prismet

$$D = \{(x,y,z) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$$

Vi må beregne $M_{x=0}$, $M_{y=0}$, $M_{z=0}$
og ~~mass~~ volum (D).



~~Først M~~ Vi skriver

$$D = \{(x,y,z) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1-x,\ 0 \leq z \leq 1\}.$$

Altså er

$$M_{x=0} = \int_0^1\int_0^1\int_0^{1-x} x\,dy\,dx\,dz = \int_0^1\int_0^1 x(1-x)\,dx\,dz = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^1 dz$$

$$= 1\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \underline{\frac{1}{6}},$$

$$M_{y=0} = \int_0^1\int_0^1\int_0^{1-x} y\,dy\,dx\,dz = \int_0^1\int_0^1 \left[y^2/2\right]_{y=0}^{1-x} dx\,dz$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2}\,dx\,dz = \int_0^1 \frac{1-2x+x^2}{2}\,dx\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[x - x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^1 dz = \frac{1}{2}\cdot\left(1 - 1^2 + \frac{1}{3}\right) = \underline{\frac{1}{6}}$$

$$M_{z=0} = \int_0^1\int_0^1\int_0^{1-x} z\,dy\,dx\,dz = \left(\int_0^1 z\,dz\right)\left(\int_0^1\int_0^{1-x} dy\,dx\right)$$

$$= \left[z^2/2\right]_{z=0}^1 \cdot \int_0^1 1-x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^1 = \frac{1}{4}$$

Til slutt er volum$(D) = 1/2$, så ~~massesenteret~~ sentroiden er

$$(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{1/2}\cdot(1/6,\ 1/6,\ 1/4) = (1/3,\ 1/3,\ 1/2).$$

15.1 Vektor- og skalarfelter

En skalar funksjon $f(x,y)$ av to variable eller $f(x,y,z)$ av tre variable kalles et <u>skalarfelt</u>.

En vektorvaluert funksjon $\vec{F}$ av to eller tre variable kalles et <u>vektorfelt</u>. Vi skriver $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}$

Skalarfelter kan visualiseres ved f. eks. å tegne grafen til f, ~~elt~~ $z = f(x,y)$, eller konturflatene $f(x,y) = C$.

Vektorfelter kan visualiseres med

<u>Hastighetsplot</u>: For utvalgte punkter $\vec{r} \in \mathcal{D}(f)$, tegn vektoren $\vec{F}(\vec{r})$ som en pil som starter i $\vec{r}$.

<u>Strømlinjer</u>: Tegn kurver som i ethvert punkt $\vec{r}$ er tangensielt med $\vec{F}(\vec{r})$:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lambda(t)\vec{F}(\vec{r}(t))$$

for en funksjon $\lambda(t)$. Om $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ er

$$\frac{dx}{dt} = \lambda(t)F_1(x,y,z), \quad \frac{dy}{dt} = \lambda(t)F_2(x,y,z), \quad \frac{dz}{dt} = \lambda(t)F_3(x,y,z).$$

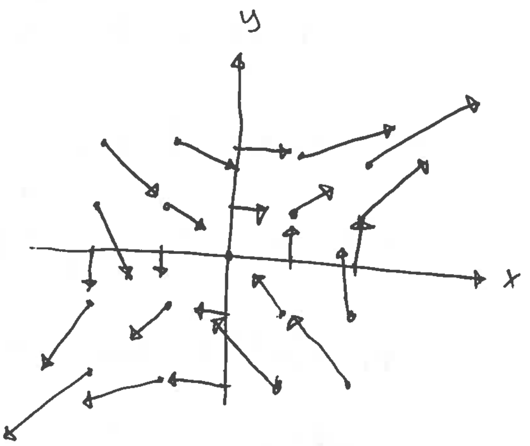
Vi kan eliminere $\lambda(t)$ og få

$$\frac{dx/dt}{F_1(x,y,z)} = \frac{dy/dt}{F_2(x,y,z)} = \frac{dz/dt}{F_3(x,y,z)}.$$

I enkelte tilfeller kan vi gange opp med en funksjon og skrive disse ligningene på formen

$$P(x)\frac{dx}{dt} = Q(y)\frac{dy}{dt} = R(z)\frac{dz}{dt}.$$

Vi kan da integrere opp og finne $x(t), y(t), z(t)$.



<u>Eksempel</u>: (15.1.3)

Skisser vektorfeltet $\vec{F}(x,y) = y\vec{i} + x\vec{j}$

Strømlinjene $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ tilfredsstiller

$$\frac{dx}{dt} = \lambda(t)\, y(t), \quad \frac{dy}{dt} = \lambda(t)\, x(t),$$

så

$$\frac{dx/dt}{y} = \frac{dy/dt}{x} \implies x\frac{dx}{dt} = y\frac{dy}{dt}$$

$$\implies x = y\frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} = y\frac{dy}{dx}$$

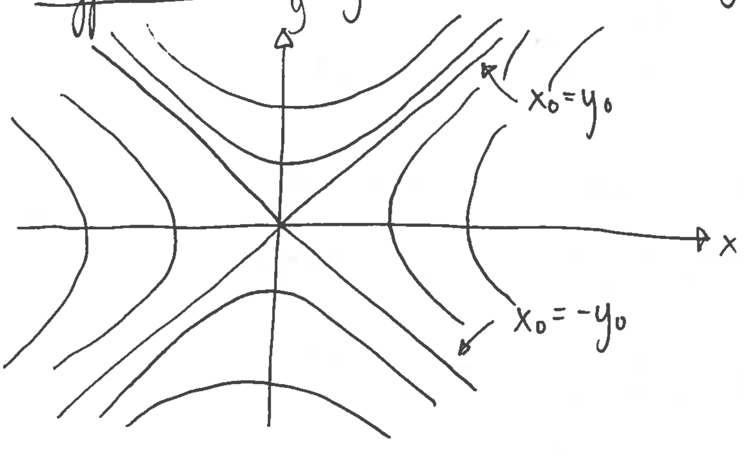
Integrer opp fra x_0 til x:

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} = \int_{x_0}^{x} y(s)\frac{dy}{ds}(s)\,ds = \int_{y(x_0)}^{y(x)} y\,dy = \frac{y(x)^2}{2} - \frac{y(x_0)^2}{2}.$$

Sett $y_0 := y(x_0)$. Vi får kurvene

$$x^2 - y^2 = x_0^2 - y_0^2,$$

som er <u>hyperbler</u>: $y(x) = \pm\sqrt{x^2 - x_0^2 + y_0^2}$.



Eksempel (15.1.15) Finn strømlinjene til $\vec{F}(x,y) = x^2\vec{i} - y\vec{j}$.

Strømlinjene $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ tilfredsstiller

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{x^2} = \frac{\frac{dy}{dt}}{-y},$$

som kan skrives som $-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{d}{dt}(\ln(y))$.

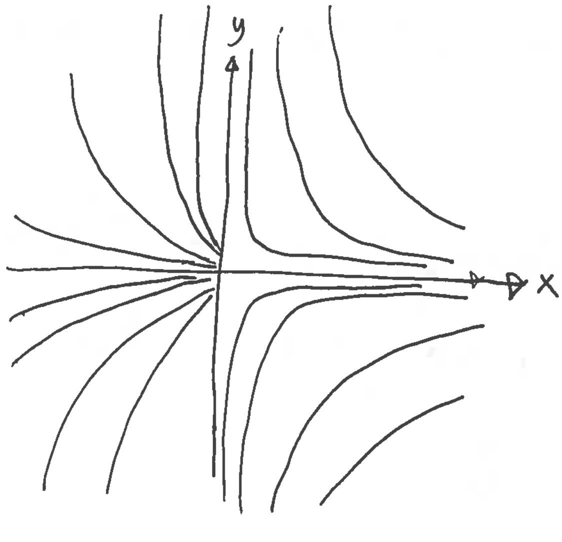
Integrer fra 0 til t og sett $x_0 = x(0)$, $y_0 = y(0)$:

$$-\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right) = -(\ln y - \ln y_0).$$

Opphøy begge sider med e:

$$\frac{y}{y_0} = e^{1/x - 1/x_0} = \frac{e^{1/x}}{e^{1/x_0}}$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \frac{y_0}{e^{1/x_0}} e^{1/x}.$$



15.2 Konservative vektorfelter

Om $f(\vec{r})$ er et skalarfelt er $\vec{F}(\vec{r}) := \nabla f(\vec{r})$ et vektorfelt. Motsatt sier vi at et gitt vektorfelt $\vec{F}(\vec{r})$ er konservativt dersom det finnes et skalarfelt $\phi(\vec{r})$ slik at $\vec{F}(\vec{r}) = \nabla \phi(\vec{r})$. Isåfall kalles en slik funksjon ϕ et potensial for $\vec{F}$.

Merk: Betingelsen $\vec{F} = \nabla \phi$ må holde overalt i $D(\vec{F})$, så φ kan ikke ha singulære punkter.

Om $\vec{F}$ og $\vec{G}$ er konservative er også f.eks. $\vec{F}+\vec{G}$ det:
$\vec{F}+\vec{G} = \nabla\varphi + \nabla\psi = \nabla(\varphi+\psi)$.

Eksempel: Vis at $\vec{F}(x,y) := y\vec{i} + x\vec{j}$ er konservativt.
Vi må finne en $\varphi(x,y)$ slik at $\vec{F} = \nabla\varphi$, dvs.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = x.$$

Da må $\varphi(x,y) = xy + C_1(y)$ (fra første likn.) og $\varphi(x,y) = xy + C_2(x)$ (fra andre likn.). Altså er

$$\varphi(x,y) = xy + C$$

for en $C \in \mathbb{R}$. Vi kan f.eks. sette $C=0$:

$$\varphi(x,y) = xy$$

Eksempel: Vis at $\vec{F}(x,y) := y\vec{i} - x\vec{j}$ ikke er konservativt.

Om $\vec{F}$ var konservativt måtte det finnes en φ s.a.

(1) $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = y$ og (2) $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -x$.

Fra (1) får vi $\varphi(x,y) = xy + C_1(y)$, og fra (2) $\varphi(x,y) = -xy + C_2(x)$. Altså må

$$2xy = C_2(x) - C_1(y),$$

men ingen slike C_1, C_2 finnes.

Alternativt kan vi derivere (1) mhp. y og (2) mhp. x:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -1,$$

som er en selvmotsigelse. $\square$

Mer generelt, for $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}$ må φ tilfredsstille

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = F_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = F_2, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = F_3,$$

så f.eks. må $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$.

Teorem: (Nødvendige betingelser)
Dersom $\vec{F}(x,y,z)$ er konservativt så må

$$\boxed{\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}.}$$

15.3 Linjeintegraler

Den "totale mengden" av en funksjon $f(x)$ for $x \in [a,b]$ er $\int_a^b f(x)\,dx$. Om f.eks. $f(x)$ er massetettheten til en tynn stang, så er $\int_a^b f(x)\,dx$ massen til stanga.

Vi kan generalisere dette til endimensjonale objekter som ligger i rommet. La $\mathcal{C}$ være en glatt kurve, dvs. den har en parametrisering $\vec{r} = \vec{r}(t)$ $(t \in [a,b])$ som er deriverbar og der $\left|\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\right| \neq 0$. Da er

$$\int_{\mathcal{C}} ds = \int_a^b \left|\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\right| dt$$

buelengden til $\mathcal{C}$, på samme måte som $\int_a^b dx = b-a$ er lengden til intervallet $[a,b]$.

Om $f(\vec{r})$, $\vec{r} = (x,y,z)$ er definert for $\vec{r} \in \mathcal{C}$, så er <u>linjeintegralet til f over $\mathcal{C}$</u> definert som

$$\int_{\mathcal{C}} f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \left|\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\right| dt.$$

<u>Merk</u>: Linjeintegralet er uavhengig av parametriseringen av kurva.

Eksempel (15.3.5): Finn massen til en vaier langs kurva $\vec{r}(t) = 3t\vec{i} + 3t^2\vec{j} + 2t^3\vec{k}$ $(0 \leq t \leq 1)$ om massetettheten i $\vec{r}(t)$ er $1+t$ g/lengde.

Vi vil beregne $\int_{\mathcal{C}} f(\vec{r})\,ds$, der $f(\vec{r}(t)) = 1+t$. Vi får

$$\int_{\mathcal{C}} f(\vec{r})\,ds = \int_0^1 f(\vec{r}(t))\left|\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\right| dt.$$

Siden $\frac{d\vec{r}}{dt}(t) = (3, 6t, 6t^2)$ blir

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\right| = \sqrt{9 + 36t^2 + 36t^4} = \sqrt{(3+6t^2)^2} = 3 + 6t^2.$$

Altså er

$$\int_{\mathcal{C}} f(\vec{r})\,ds = \int_0^1 (1+t)(3+6t^2)\,dt = \int_0^1 3 + 6t^2 + 3t + 6t^3\,dt$$

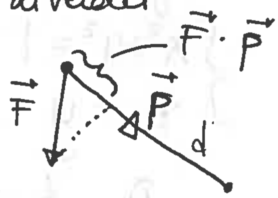
$$= \left[3t + 2t^3 + \frac{3}{2}t^2 + \frac{6}{4}t^4\right]_{t=0}^{1} = 3 + 2 + \frac{3}{2} + \frac{6}{4} = \underline{8}.$$

Massen til vaieren er altså $\underline{8\text{ g}}$

15.4 Linjeintegralet av vektorfelter

Arbeidet som en kraft F gjør på et legeme når det flyttes en avstand d er $W = dF$.

Om kraften er rettet, gitt ved $\vec{F}$, og bevegelsen ikke er parallell med $\vec{F}$ men i en retning $\vec{p}$, er arbeidet



$$W = \vec{F}\cdot\vec{p}\; d \qquad (|\vec{p}| = 1)$$

d er buelengden til kurva $\mathcal{C}$ gitt ved $\vec{r}(s) = \vec{p}\,s$, $\quad 0 \le s \le d$,

så
$$W = \vec{F}\cdot\vec{p}\; d = \int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot\vec{p}\; ds = \int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{ds}\, ds$$

$$= \int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot\vec{T}\, ds,$$

der $\vec{T} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}$ er enhetstangenten til $\vec{r}$ (husk at $\mathcal{C}$ er buelengdeparametrisert, $\left|\dfrac{d\vec{r}}{ds}\right| = |\vec{p}| = 1$).

Def:
Linjeintegralet til (tangentialkomponenten til) $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}$

er
$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot\vec{T}\, ds$$

Dersom $\mathcal{C}$ er lukket skriver vi $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$, sirkulasjonen til $\vec{F}$ rundt $\mathcal{C}$.

Eksempel (15.4.5): Beregn $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, der $\vec{F}(x,y,z) = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ fra $(-1,0,0)$ til $(1,0,0)$ langs de to retningene til kurva gitt ved

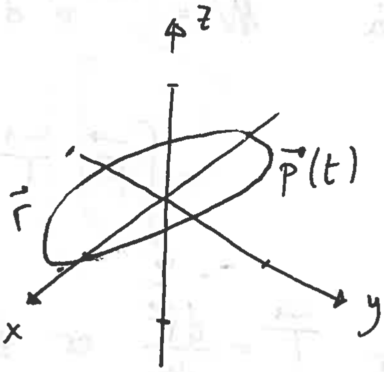
$$\begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ z = y. \end{cases}$$

De to delene av kurvene er gitt ved

~~To parametriseringer av C er gitt ved~~

$$\vec{p}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + \sin t\,\vec{k}, \qquad \pi \le t \le 2\pi$$

$$\cancel{\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j} - \sin t\,\vec{k}, \qquad \pi \le t \le 2\pi}.$$



Vi har

$$\int_{\mathcal{C}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\pi}^{2\pi} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt$$

$$= \int_{\pi}^{2\pi} \left(\sin^2 t,\ \cos t \sin t,\ \cos t \sin t\right) \cdot \left(-\sin t,\ \cos t,\ \cos t\right) dt$$

$$= \int_{\pi}^{2\pi} 2\cos^2 t \sin t - \sin^3 t \, dt \qquad \begin{aligned} x &= \cos t \\ dx &= -\sin t\, dt \end{aligned}$$

$$= -\int_{1}^{-1} \left(2x^2 - (1-x^2)\right) dx = \int_{-1}^{1} 1 - 3x^2\, dx = \left[x - x^3\right]_{x=-1}^{1} = \underline{\underline{0}}$$

Om vi integrerer f.eks. over den rette linja fra $(-1,0,0)$ til $(1,0,0)$ får vi det samme: La $\vec{r}(t) = (t,0,0)$, $-1 \le t \le 1$.

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{-1}^{1} (0,0,0)\cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt = 0.$$

<u>Eksempel (15.4.1)</u>: Integrer $\vec{F}(x,y) = xy\,\vec{i} - x^2\vec{j}$ langs $y = x^2$ fra $(0,0)$ til $(1,1)$.

Vi har $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + t^2\vec{j}$, $0 \le t \le 1$.

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}\cdot\frac{dr}{dt}\, dt = \int_0^1 (t^3, -t^2)\cdot(1, 2t)\, dt = \int_0^1 -t^3\, dt = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}}$$

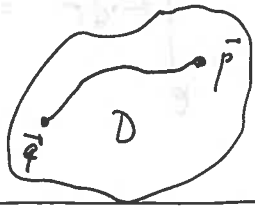
Om vi derimot integrerer over $\tilde{\mathcal{C}}$ gitt ved $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + t\,\vec{k}$ får vi

$$\int_{\tilde{\mathcal{C}}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 (t^2, -t^2)\cdot(1,1)\, dt = \underline{\underline{0}}.$$

Merk at vektorfeltet i 15.4.5 er konservativt, mens det i 15.4.1 <u>ikke</u> er det.

Def.:

En mengde $D \subset \mathbb{R}^n$ er <u>sammenhengende</u> om alle punkter $\vec{p}, \vec{q} \in D$ kan kobles med en kurve som ligger i D



D er <u>enkeltsammenhengende</u> om det ikke inneholder hull og er sammenh.

En lukket kurve er en <u>Jordankurve</u> (eng.: simple curve) om den ikke krysser seg selv.

Teorem

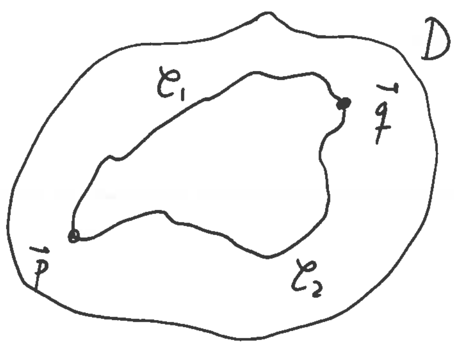
La $\vec{F}$ være et glatt vektorfelt på et åpent, sammenh. domene D. Da er følgende ekvivalent:

(i) $\vec{F}$ er konservativ i D

(ii) $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ for alle stykkevis glatte, lukkede kurver $\mathcal{C} \subset D$

(iii) Om $\vec{p}, \vec{q} \in D$ og både $\mathcal{C}_1$ og $\mathcal{C}_2$ starter i $\vec{p}$ og ender i $\vec{q}$, så er

$$\int_{\mathcal{C}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$



Dersom φ er potensial til $\vec{F}$ så er

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\, d\vec{r} = \varphi(\vec{q}) - \varphi(\vec{p}).$$

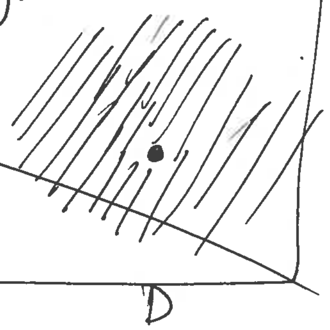
<u>Eksempel (15.4.5)</u>: La $\vec{F}(x,y,z) = (yz, xz, xy)$, og merk at $\vec{F} = \nabla\varphi$, der $\varphi(x,y,z) = xyz$. Om $\mathcal{C}$ kobler $(-1,0,0)$ med $(1,0,0)$ er

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \varphi(1,0,0) - \varphi(-1,0,0) = 0 - 0 = \underline{\underline{0}}$$

~~<u>Moteksempel</u>: La~~ $\vec{F}(x,y) = -\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}(x,y)$. ~~Da er~~

$\vec{F} = \nabla\varphi$, der $\varphi(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, for alle $(x,y) \in D := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

D er



D

<u>Eksempel</u>: La $\mathcal{C}$ være snittet mellom $z = \ln(1+x)$ og $y = x$ fra $(0,0,0)$ til $(1,1,\ln 2)$. Beregn

$$\int_{\mathcal{C}} (2x\sin(\pi y) - e^z)dx + (\pi x^2\cos(\pi y) - 3e^z)dy - xe^z dz = \int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r},$$

der $\vec{F}(\vec{r}) = (2x\sin(\pi y) - e^z, \pi x^2\cos(\pi y) - 3e^z, xe^z)$.

Merk at $\vec{F}(\vec{r}) = \nabla\varphi(\vec{r}) + (0, -3e^z, 0)$, der $\varphi(x,y,z) = x^2\sin(\pi y) - xe^z$.

Vi har $\int_{\mathcal{C}} \nabla\varphi\cdot d\vec{r} = \varphi(1,1,\ln 2) - \varphi(0,0,0) = -2$.

Om $x = y = t$ er $z = \ln(1+t)$, så

$$\int_{\mathcal{C}} (0, -3e^z, 0) \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \left(0, -3e^{\ln(1+t)}, 0\right) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt$$

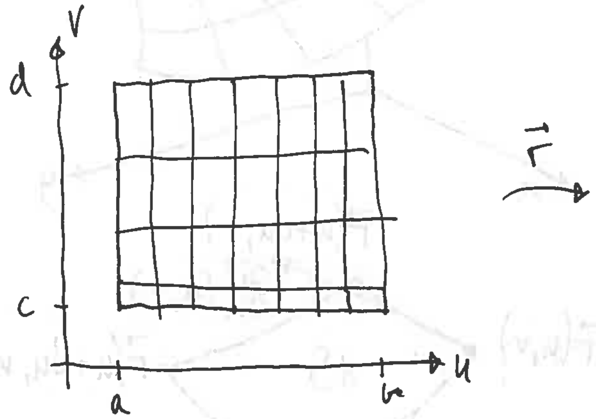
$$= -3 \int_0^1 (1+t)\, dt = -3\left(1 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{2}.$$

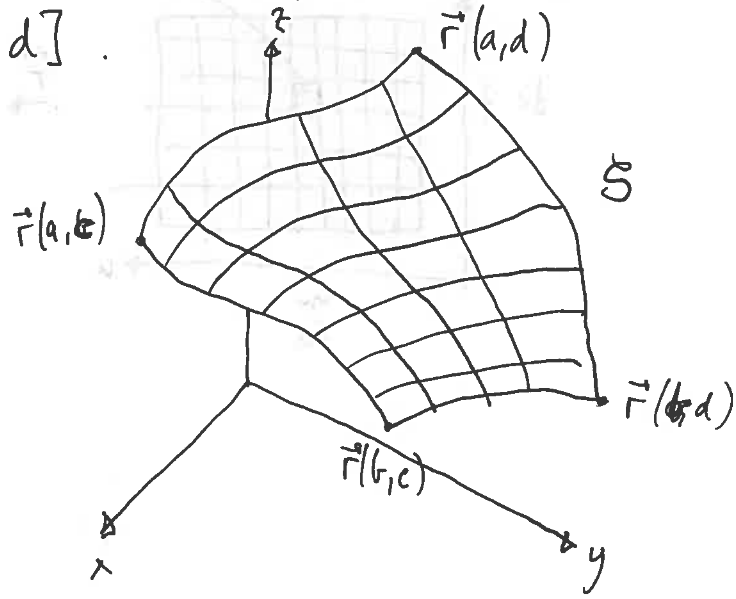
$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{9}{2} - 2 = \underline{\underline{-\frac{13}{2}}}$$

15.5 Parametriserte flater

På samme måte som parametriserte kurver $\vec{F}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, kan vi betrakte parametriserte flater:

Def:
En <u>parametrisert flate</u> i $\mathbb{R}^3$ er en kontinuerlig funksjon $\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$ for (u,v) i et rektangel $R = [a,b] \times [c,d]$.





(Merk: definisjonsmengden til $\vec{r}$ trenger ikke nødvendigvis være et rektangel)

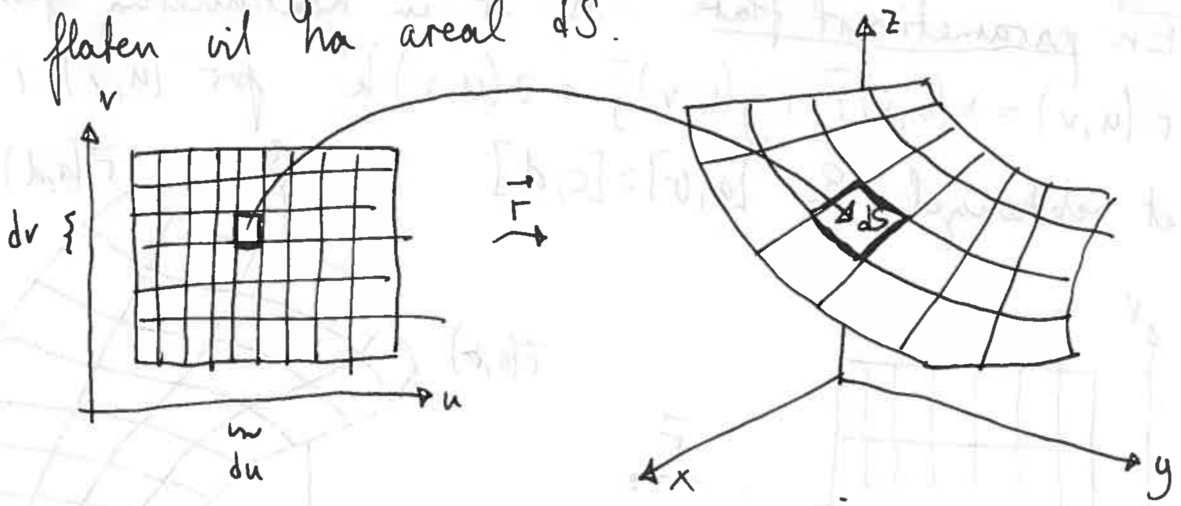
<u>Randa</u> til flaten S er mengden

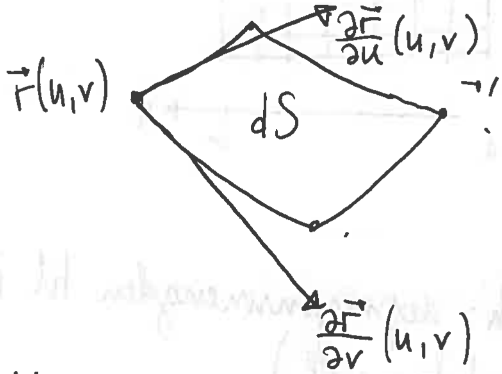
$$\partial S = \{\vec{r}(u,v) : u = a,\ u = b,\ v = c \ \cancel{\text{eller}}\ v = d\}.$$

Ved å sette/lime sammen flere parametriserte flater får man en <u>sammensatt flate</u>.

Flateintegralet

For å integrere opp funksjoner over parametriserte flater bruker vi Riemann-summer: Del opp R i små ~~deler~~ rektangler med sidelengder du, dv. De tilsvarende områdene på flaten vil ha areal dS.





Så lenge $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ og $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ ikke er parallelle, vil dS være proporsjonal med $du \cdot dv$.

Normalvektoren til S i (u,v) er gitt ved

$$\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$$

$$= \det\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)\vec{i} + \det\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)\vec{j} + \det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\vec{k}.$$

Arealelementet dS kan da skrives som

$$\boxed{dS = |\vec{n}|\,du\,dv = \sqrt{\cdots}\;du\,dv.}$$

Vi sier ~~at~~ S er glatt om $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v)$ og $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v)$ aldri er parallelle.

Flateintegralet av en funksjon $f(x,y,z)$ over S er

$$\iint_S f\,dS = \int_a^b\int_c^d f(\cancel{\quad}\,\vec{r}(u,v))\sqrt{\ldots}\,dv\,du.$$

(Merk: $\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ er lik $\vec{0}$ hviss $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \parallel \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$.)

Flateelementet for implisitte flater

La en flate nå være gitt som $G(x,y,z) = 0$. Dersom flaten nær et punkt (x,y,z) ikke er vertikal, dvs. $\frac{\partial G}{\partial z}(x,y,z) \neq 0$, så er

$$dS = \frac{|\vec{n}|}{|\vec{n}\cdot\vec{k}|}\,dx\,dy$$

Siden $\vec{n} = \nabla G(x,y,z)$ blir altså

$$dS = \frac{|\nabla G(x,y,z)|}{\left|\frac{\partial G}{\partial z}(x,y,z)\right|}\,dx\,dy.$$

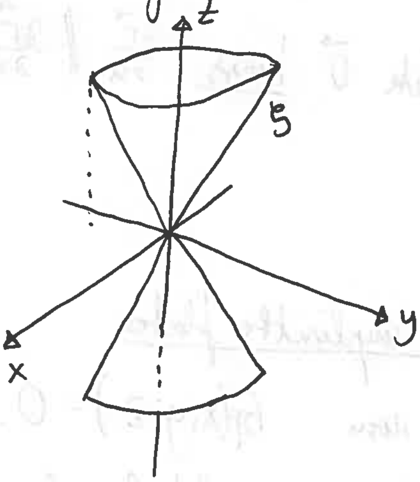
Flateelementet for grafer

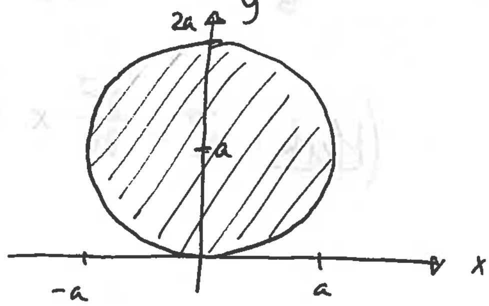
Om $x=u$, $y=v$, $z=z(u,v)$ blir $\vec{n} = -\frac{\partial z}{\partial u}\vec{i} - \frac{\partial z}{\partial v}\vec{j} + \vec{k}$, så

$$dS = |\vec{n}|\,du\,dv = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 + 1}\,du\,dv.$$

Eksempel (15.5.8) Finn arealet av den delen av kjeglen $z^2 = x^2 + y^2$ som ligger inni sylinderet $x^2 + y^2 = 2ay$.

Vi kan skrive sylinderet som $x^2 + (y-a)^2 = a^2$.





Vi regner kun arealet av delen av $\mathcal{S}$ der $z \geq 0$. Parametriser denne som $x = u$, $y = v$, $z = \sqrt{u^2 + v^2}$. Da blir

$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{u}{z}$, $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{v}{z}$, så

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{u}{z}\right)^2 + \left(\frac{v}{z}\right)^2}\,du\,dv = \sqrt{1 + \frac{u^2+v^2}{u^2+v^2}}\,du\,dv = \sqrt{2}\,du\,dv.$$

Vi får

$$(\text{areal av } \mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} dS = 2\iint_D \sqrt{2}\,dx\,dy,$$

der $D = \{(x,y) : x^2 + (y-a)^2 \leq a^2\}$. Altså er

$$(\text{areal av } \mathcal{S}) = 2\sqrt{2}\iint_D dx\,dy = 2\sqrt{2}\,(\text{areal av } D) = \underline{\underline{2\sqrt{2}\,\pi a^2}}$$

15.6 Orienterte flater og fluksintegraler

La $\vec{F}$ være et vektorfelt og S en flate. Om $\vec{F}$ representerer flyten av en væske og S en "usynlig" flate vil vi finne hvor mye væske som flyter gjennom S.

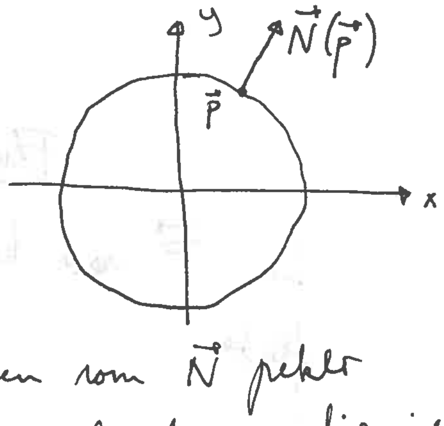
earth.nullschool.net

For å gi mening til dette kan vi kun betrakte bestemte typer flater S.

Def.
En glatt flate S i $\mathbb{R}^3$ er orienterbar om det finnes et kontinuerlig vektorfelt $\vec{N}(\vec{p})$, $\vec{p} \in S$, som har lengde 1 $(|\vec{N}(\vec{p})| = 1 \ \forall \vec{p} \in S)$ og som står normalt på S i $\vec{p}$.

Eksempel:
Sfæren $S = \{\vec{p} \in \mathbb{R}^3 : |\vec{p}| = R\}$ er orienterbar: la

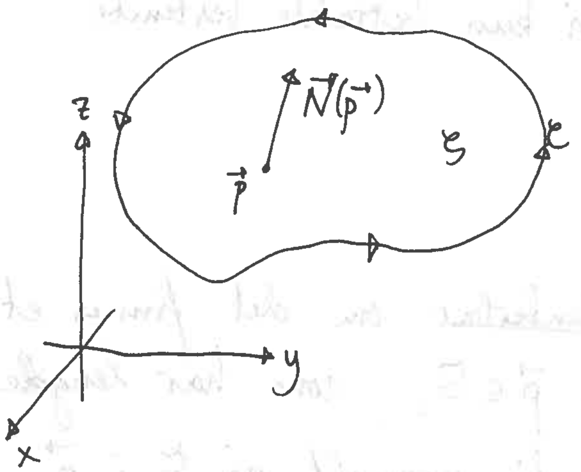
$$\vec{N}(\vec{p}) = \frac{\vec{p}}{R}.$$

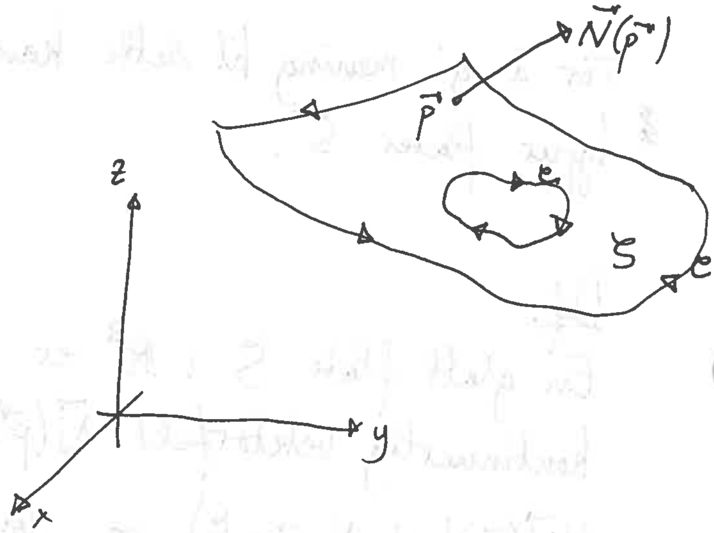


En orienterbar flate må ha to sider. Siden som $\vec{N}$ peker mot er den positive siden av S, og den andre den negative siden.

Eksempel:
En Möbius-stripe er ikke orienterbar, siden den kun har én side.

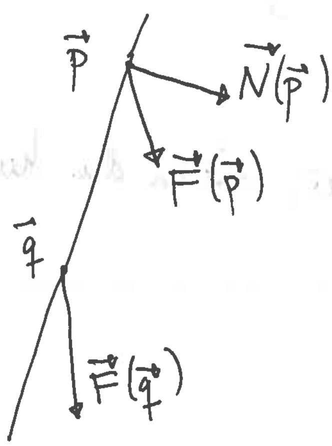
En orienterbar flate S har en kanonisk orientering av sine randkurver C: Om man står på C på den positive siden av S og går i denne retningen, skal man ha S på sin venstre side.

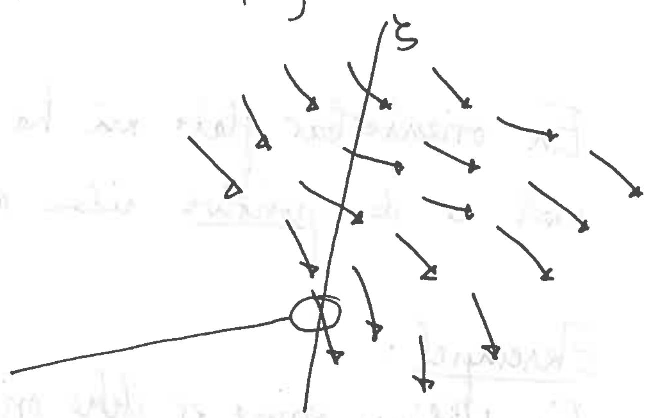




Fluks gjennom en flate

La $\vec{F}$ være hastighetsfeltet til en væske, og la S være en orienterbar flate.





Flytraten eller fluksen til væska gjennom et lite arealelement dS er altså

$$\vec{F} \cdot \vec{N} dS = \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

der $d\vec{S} := \vec{N} dS$.

Def:

Fluksen til et vektorfelt $\vec{F}$ gjennom en orienterbar flate S er

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS.$$

Dersom flaten er lukket skriver vi $\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$.

Fluks for param. flater

Om S er parametrisert som $\vec{r}(u,v)$, er $\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ ~~normal~~ normal på S, og om S er glatt er $|\vec{n}| \neq 0$. Da er

$$\vec{N} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

en enhetsnormal. Videre er $dS = |\vec{n}| du dv$, så

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS = \iint_S \vec{F} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} |\vec{n}| du dv = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, du dv.$$

Eksempel (15.6.2)

Finn fluksen til $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ gjennom $S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = a^2\}$.

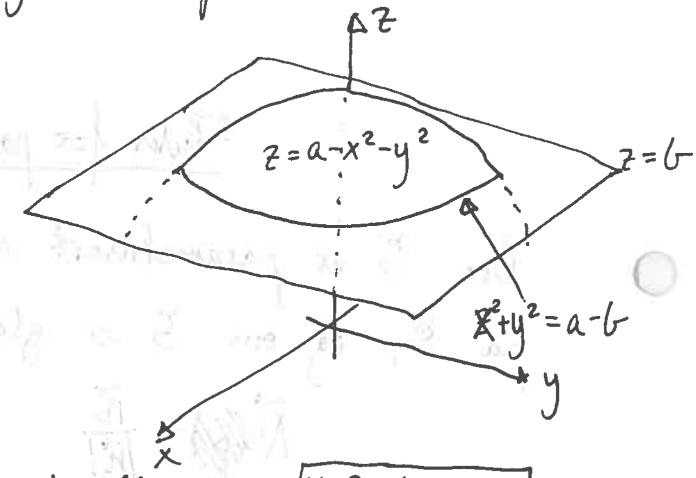
S er orienterbar med enhetsnormal $\vec{N}(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{a}$.

Vi får

$$\oiint_S \vec{F}(\vec{p}) \cdot d\vec{S} = \oiint_S (x,y,z) \cdot \frac{(x,y,z)}{a}\, dS = \oiint_S \frac{x^2+y^2+z^2}{a}\, dS$$

$$= a \oiint_S dS = a \cdot \text{areal}(S) = a \cdot 4\pi a^2 = \underline{\underline{4\pi a^3}}$$

Eksempel (15.6.5): Finn fluksen til $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ opp gjennom flaten $z = a - x^2 - y^2$ over planet $z = b$ $(b < a)$



Flaten S ~~kan ses som grafen~~ kan skrives som

$S = \{(x,y,z) : G(x,y,z) = 0\}$,

der $G(x,y,z) = x^2+y^2+z-a$.

Vi har $\nabla G(x,y,z) = (2x, 2y, 1)$

og $\frac{\partial G}{\partial z}(x,y,z) = 1$, så $dS = \frac{|\nabla G|}{|\partial G / \partial z|} = \frac{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}{1}$

Videre er $\vec{N} = \pm \frac{\nabla G}{|\nabla G|}$, så

$$d\vec{S} = \vec{N}\, dS = \pm \frac{\nabla G}{\left|\frac{\partial G}{\partial z}\right|} dx\,dy = \pm (2x, 2y, 1)\, dx\,dy$$

Vi skal ~~opp~~ gjennom S, så vi velger "+". Vi får

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_D (x,y,z)\cdot(2x,2y,1)\,dx\,dy = \iint_D 2x^2+2y^2+z\,dx\,dy,$$

$$= \iint_D x^2+y^2+a\,dx\,dy$$

der $D=\{(x,y): 0\le x^2+y^2\le a-b\}$. Bruk ~~sylinderkoord.:~~ ~~$x^2+y^2=r^2$~~ polarkoord.: $x^2+y^2=r^2$, $dxdy = r\,dr\,d\theta$, så

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{a-b}}(r^2+a)\,r\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^{\sqrt{a-b}} r^3+ar\,dr$$

$$= 2\pi\left[\frac{r^4}{4}+\frac{ar^2}{2}\right]_{r=0}^{\sqrt{a-b}} = \pi\left(\frac{(a-b)^2}{2}+a(a-b)\right)$$

$$\cancel{= \pi(a-b)^2\left(\frac{a^2-2ab+b^2}{2}+1\right)}$$

$$= \pi\left(\frac{a^2}{2}-ab+\frac{b^2}{2}+a^2-ab\right) = \pi\left(\frac{3a^2}{2}+\frac{b^2}{2}-2ab\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}\left(3a^2-4ab+b^2\right)}}$$

16.1 Gradient, divergens og curl

Def:
Gradienten til et skalarfelt f er $\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$.

La $\vec{F}$ være et vektorfelt. **Divergensen** til $\vec{F}$ er skalarfeltet
$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

Curlen (eller rotasjonen) til $\vec{F}$ er vektorfeltet
$$\operatorname{curl} \vec{F} = \nabla \times \vec{F}$$
$$= \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix}$$
$$= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Eksempel: (16.1.1)
Beregn $\operatorname{div}\vec{F}$ og $\operatorname{curl}\vec{F}$ til $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j}$.
$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 1 + 1 + 0 = \underline{\underline{2}}$$
$$\operatorname{curl}\vec{F} = (0-0)\vec{i} + (0-0)\vec{j} + (0-0)\vec{k} = \vec{0}.$$

Eksempel (16.1.10): $\vec{F} = \vec{r} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$.

Siden $x = r\cos\theta$ er $1 = \frac{\partial}{\partial x}(r\cos\theta) = \frac{\partial r}{\partial x}\cos\theta + r\frac{\partial}{\partial x}(\cos\theta)$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\cos\theta = \frac{1 - \frac{\partial r}{\partial x}\cos\theta}{r} \qquad \left(\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}\right)$$

$$= \frac{1 - \frac{x\cos\theta}{r}}{r} = \frac{1-\cos^2\theta}{r}.$$

Likeledes blir $\frac{\partial}{\partial y}\sin\theta = \frac{1-\sin^2\theta}{r}$. Altså er

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial(\cos\theta)}{\partial x} + \frac{\partial(\sin\theta)}{\partial y} + \frac{\partial 0}{\partial z}$$

$$= \frac{1-\cos^2\theta}{r} + \frac{1-\sin^2}{r} = \frac{2-(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}{r} = \underline{\underline{\frac{1}{r}}}$$

Siden $\vec{k}$-komponenten til $\vec{F}$ er lik 0, og F_1, F_2 ikke avhenger av z, vil

$$\operatorname{curl}\vec{F} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Vi har $x = r\cos\theta \Rightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial y}(r\cos\theta) = \frac{\partial r}{\partial y}\cos\theta + r\frac{\partial\cos\theta}{\partial y}$

$$\Rightarrow \frac{\partial(\cos\theta)}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial r}{\partial y}\cos\theta}{r} = -\frac{\frac{y\cos\theta}{r}}{r} = -\frac{y\cos\theta}{r^2}$$

$$= -\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}$$

og $\frac{\partial(\sin\theta)}{\partial x} = -\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}$.

Altså er $\operatorname{curl}\vec{F} = \left(\left(-\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\right) - \left(-\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\right)\right)\vec{k} = \underline{\underline{\vec{0}}}.$

$\square$

16.2 Vektoridentiteter

Vi har følgende vektoridentiteter:

(i) $\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi$

(ii) $\nabla\cdot(\varphi\vec{F}) = \nabla\varphi\cdot\vec{F} + \varphi\nabla\cdot\vec{F}$

(iii) $\nabla\times(\varphi\vec{F}) = (\nabla\varphi)\times\vec{F} + \varphi\nabla\times\vec{F}$

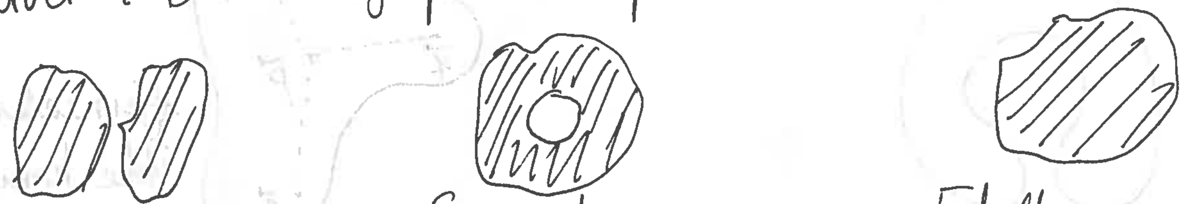
(iv) $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{F}) = 0$ (div curl = 0)

(v) $\nabla\times(\nabla\varphi) = \vec{0}$ (curl grad = 0)

$\vec{F}$ er <u>rotasjonsfritt</u> om $\nabla\times\vec{F} = \vec{0}$ (f.eks. om $\vec{F}$ er konservativt, $\vec{F} = \nabla\varphi$)

$\vec{F}$ er <u>divergensfritt</u> om $\nabla\cdot\vec{F} = 0$ (f.eks. om $\vec{F} = \nabla\times\vec{G}$).

Et domene $D\subset\mathbb{R}^n$ er <u>enkeltsammenhengende</u> om D er sammenh. og alle lukkede kurver i D kan krympes til et punkt



Ikke sammenh. — Sammenh. Ikke enkeltsammenh. — Enkeltsammenh.

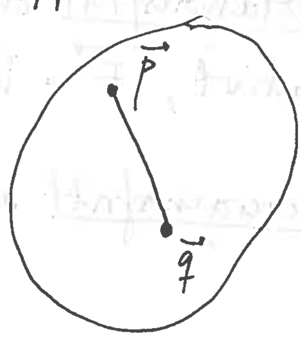
<u>Teorem</u>:
Om $\vec{F}$ er et glatt, rotasjonsfritt ($\nabla\times\vec{F} = \vec{0}$) vektorfelt på et enkeltsammenh. område D, så er $\vec{F}$ konservativt, dvs. $\vec{F} = \nabla\varphi$.

Teorem:

La $\vec{F}$ være et glatt, divergensfritt vektorfelt på et område D med egenskapen at alle lukkede flater i D begrenser ~~ek~~ en mengde i D. Da er $\vec{F} = \nabla \times \vec{G}$ for et vektorfelt $\vec{G}$ på D.

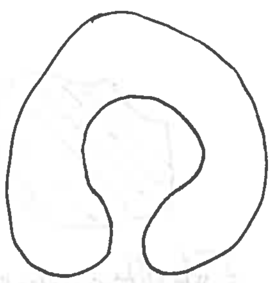
Merk:

Om D er konvekst, dvs. $\forall\, \vec{p}, \vec{q} \in D$ ligger den rette linja mellom $\vec{p}$ og $\vec{q}$ i D, så oppfyller D kravene i begge teoremene.

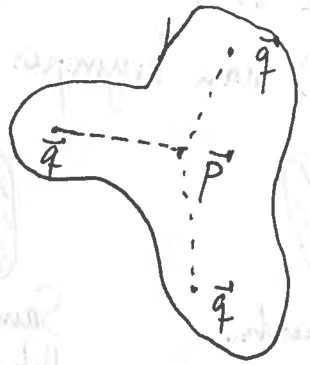


Konvekst

Dette holder også om D er stjerneaktig, dvs. det ovenfor gjelder for én $\vec{p} \in D$



Ikke stjerneaktig eller konvekst



Stjerneaktig, ikke konvekst

Eksempel: $\vec{F}(x,y,z) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}, 0 \right)$

er rotasjonsfritt på $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$, men ikke konservativt.

16.3 Greens teorem i planet

Kalkulus: fundamentalthm. sier at $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b)-f(a)$.

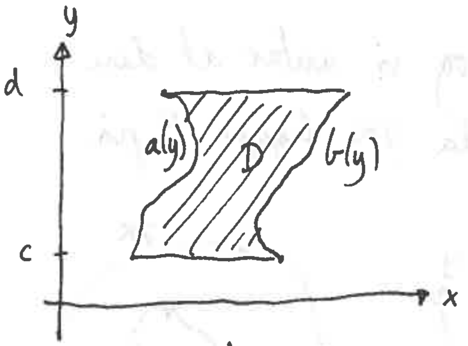
Vi skal finne todim. og tredim. generaliseringer av dette.

En mengde $D\subset\mathbb{R}^2$ er *x-enkel* om D kan skrives som

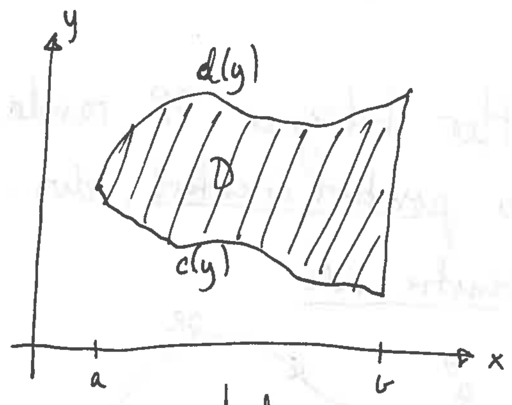
$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a(y)\le x\le b(y),\ c\le y\le d\}.$$

D er *y-enkel* om

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\le x\le b,\ c(x)\le y\le d(x)\}.$$

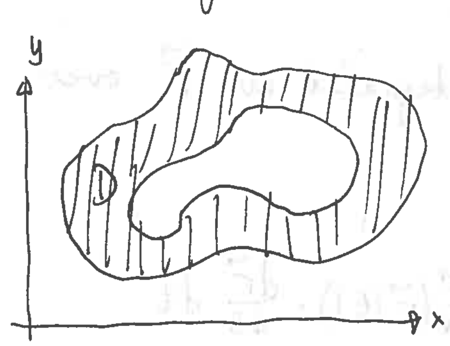


x-enkel

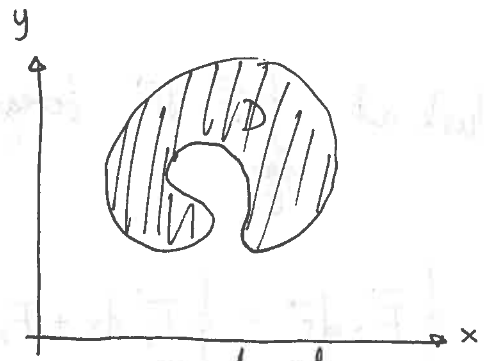


y-enkel

D er *regulært* om det kan skrives som en union av x- og y-enkle mengder.



regulært



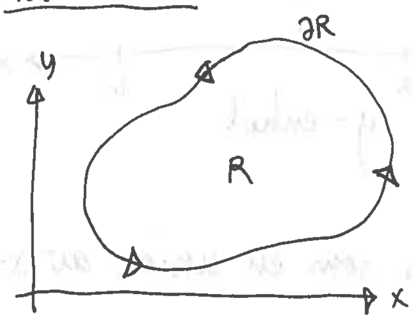
regulært

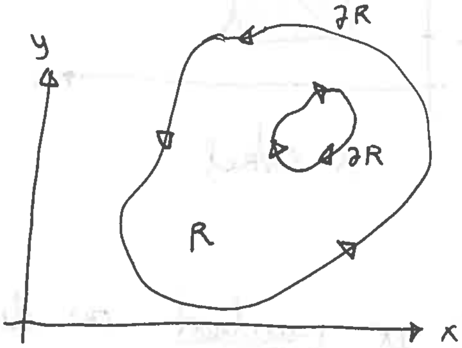
Greens teorem

La R være en mengde i $\mathbb{R}^2$ hvis rand består av én eller flere stykkevis glatte, lukkede kurver. Om $\vec{F}(x,y) = F_1(x,y)\,\vec{i} + F_2(x,y)\,\vec{j}$ er et glatt vektorfelt på R, så er

$$\oint_{\partial R} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA = \iint_R \operatorname{curl}\vec{F}\cdot\vec{k}\, dA .$$

Her betegner ∂R randa til R, og vi antar at den er <u>positivt orientert</u>, dvs. langs randa ∂R ligger R på <u>venstre side</u>





Husk at $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ betegner linjeintegralet av $\vec{F}$ over $\mathcal{C}$,

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_{\mathcal{C}} F_1\,dx + F_2\,dy = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\,dt$$

om $\mathcal{C}$ er param. som $\vec{r}(t)$, $a \le t \le b$.

Divergensteoremet

Under de samme antagelser som i Greens thm er

$$\oint_{\partial R} \vec{F} \cdot \vec{N}\, ds = \iint_R \operatorname{div} \vec{F}\, dA .$$

Bevis:

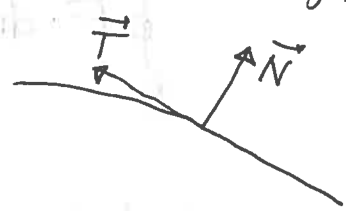
La $\vec{G} = -F_2 \vec{i} + F_1 \vec{j}$. Da er

$$\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = \operatorname{div} \vec{F} .$$

Altså er

$$\iint_R \operatorname{div} \vec{F}\, dA = \iint_R \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) dA = \int_{\partial R} \vec{G} \cdot d\vec{r},$$

av Greens thm. Siden $d\vec{r} = \vec{T}\, ds$ og $\vec{T} = -N_2 \vec{i} + N_1 \vec{j}$,



er

$$\vec{G} \cdot d\vec{r} = \vec{G} \cdot \vec{T}\, ds$$

$$= (-F_2, F_1) \cdot (-N_2, N_1)\, ds$$

$$= F_1 N_1 + F_2 N_2\, ds$$

$$= \vec{F} \cdot \vec{N}\, ds$$

Altså er

$$\iint_R \operatorname{div} \vec{F}\, dA = \int_{\partial R} \vec{G} \cdot d\vec{r} = \oint_{\partial R} \vec{F} \cdot \vec{N}\, ds .$$

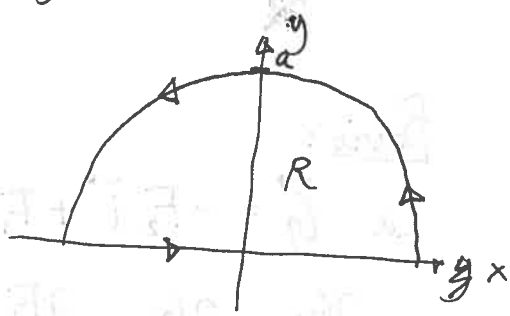
$\blacksquare$

Eksempel (16.3.1)

Evaluer $\oint_{\mathcal{C}} (\sin x + 3y^2)\,dx + (2x - e^{-y^2})\,dy = \oint_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$,

der $\mathcal{C}$ er randa til $R = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq a^2,\ y \geq 0\}$,

orientert mot klokka.



Av Greens er

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA.$$

Vi har $\vec{F} = (\sin x + 3y^2,\ 2x - e^{-y^2})$, så

$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2 - 6y$. Altså er

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_R 2-6y\,dA = 2\iint_R dA - 6\iint_R y\,dA.$$

Vi skriver $R = \{(x,y) : 0 \leq y \leq a,\ -\sqrt{a^2-y^2} \leq x \leq \sqrt{a^2-y^2}\}$.

Da blir

$$\iint_R y\,dA = \int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} y\,dx\,dy = \int_0^a y\cdot 2\sqrt{a^2-y^2}\,dy \qquad \begin{aligned} s &= a^2-y^2 \\ ds &= -2y\,dy \end{aligned}$$

$$= -\int_{a^2}^{0} \sqrt{s}\,ds = -\left[\frac{2}{3}s^{3/2}\right]_{s=a^2}^{0} = \frac{2}{3}(a^2)^{3/2} = \frac{2a^3}{3}.$$

Til slutt er $\iint_R dA = \text{areal}(R) = \frac{1}{2}\pi a^2$. Altså blir

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 2\cdot\frac{1}{2}\pi a^2 - 6\cdot\frac{2a^3}{3} = \underline{\underline{\pi a^2 - 4a^3}}$$

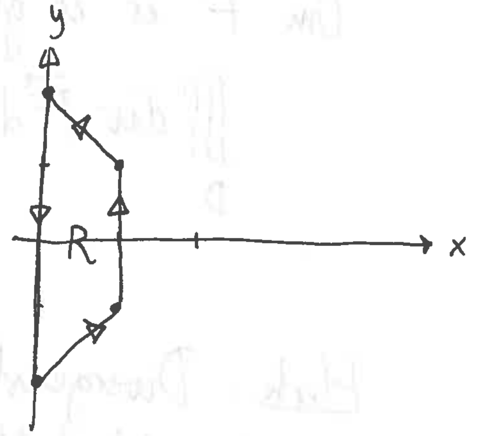
$\square$

<u>Eksempel</u> (16.3.3): Evaluer $\oint_{\mathcal{C}} \left(x\sin(y^2)-y^2\right)dx+\left(x^2y\cos(y^2)+3x\right)dy$

hvor $\mathcal{C} = \partial R$, R er trapesoiden med hjørner $(0,-2), (1,-1), (1,1)$ og $(0,2)$, og $\mathcal{C}$ er orientert mot klokka

Skriv linjeint. som $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$, der $\vec{F}=\left(x\sin(y^2)-y^2, x^2y\cos(y^2)+3x\right)$.

$$\Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y} = \cancel{2xy\cos(y^2)}+3-\left(\cancel{2xy\cos(y^2)}-2y\right)$$
$$= 3+2y$$



R er en y-enkel mengde,

$R=\{(x,y): 0\leq x\leq 1, -2+x\leq y\leq 2-x\}$.

Altså blir

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dA = \iint_R 3+2y\, dA$$

$$= \int_0^1\int_{-2+x}^{2-x} 3+2y\, dy\, dx = \int_0^1 \left[3y+y^2\right]_{y=-2+x}^{2-x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(3(2-x)-3(-2+x)+\cancel{(2-x)^2}-\cancel{(-2+x)^2}\right)dx$$

$$= \int_0^1 12-6x\, dx = 12-3 = \underline{\underline{9}}$$

16.4 Divergensteoremet i rommet

Vi lar nå D være en mengde i $\mathbb{R}^3$ som har rand ∂D bestående av én eller flere lukkede, orienterbare flater $\mathcal{S}$.

__Teorem:__

Om $\vec{F}$ er et glatt vektorfelt på D, så er

$$\iiint_D \operatorname{div} \vec{F}\, dV = \oiint_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{N}\, dS = \oiint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

__Merk:__ Divergensteoremet gir et uttrykk for fluksintegralet av et vektorfelt gjennom randa til et domene.

Om $\vec{F}$ er divergensfritt, $\operatorname{div} \vec{F} \equiv 0$, så er

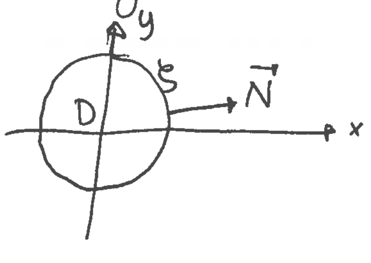
$$\oiint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0.$$

__Eksempel__ (16.4.3)

Beregn fluksen til $\vec{F} = (x^2+y^2)\vec{i} + (y^2-z^2)\vec{j} + z\vec{k}$ __ut__ av $\mathcal{S} = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = a^2\}$.

Vi har $\mathcal{S} = \partial D$, der $D = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq a^2\}$.

~~[illegible]~~ Enhetsnormalen $\vec{N}$ ut av D peker også ut av $\mathcal{S}$.



Vi har

$\operatorname{div} \vec{F} = 2x + 2y + 1$, så

$$\oiint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_D \operatorname{div}\vec{F}\, dV = \iiint_D 2x+2y+1\, dV$$

$$= 2\iiint_D x\, dV + 2\iiint_D y\, dV + \iiint_D dV.$$

D er symmetrisk om x- og y-aksene og x og y er odde funksjoner, så de to første int. er lik 0.

$$\to \quad \oiint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_D dV = \text{volum}(D) = \underline{\underline{\frac{4\pi a^3}{3}}} \qquad \square$$

Teorem

Under de samme bet. som divergensteoremet er

(i) $\displaystyle\iiint_D \operatorname{curl}\vec{F}\, dV = -\oiint_{\partial D} \vec{F}\times\vec{N}\, dS$

(ii) $\displaystyle\iiint_D \nabla\varphi\, dV = -\oiint_{\partial D} \varphi\vec{N}\, dS$

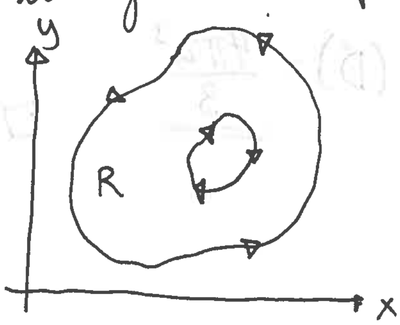
for alle glatte vektorfelter $\vec{F}$ og skalarfelter φ.

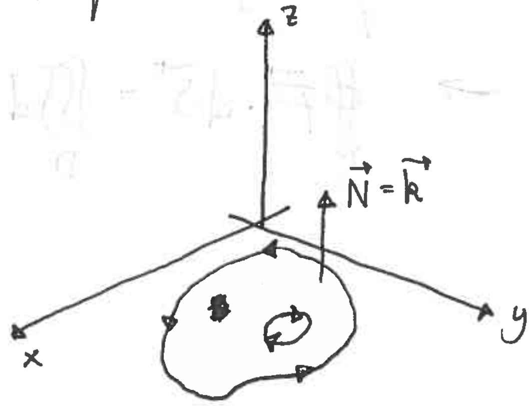
16.5 Stokes' teorem

Greens teorem sier at om $R \subset \mathbb{R}^2$ har stykkevis glatt rand ∂R, så er

$$\oint_{\partial R} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA$$

for alle glatte vektorfelt $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j}$ på R.





Vi kan se på R som en flate i rommet ved å legge R i x-y-planet. Da sier Greens thm at

$$\oint_{\partial R} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_R \operatorname{curl}\vec{F}\cdot\vec{k}\, dS,$$

hvor vi nå ser på $\vec{F}$ som et vektorfelt i rommet,

$$\vec{F}(x,y,z) = F_1(x,y)\,\vec{i} + F_2(x,y)\,\vec{j}.$$

~~Dette kan gis~~ Merk: her at $\vec{k}$ blir en enhetsnormal på R.

Stokes' teorem:

La $S \subset \mathbb{R}^3$ være en stykkevis glatt, orienterbar flate med stykkevis glatt kant $\mathcal{C}$. Om $\vec{F}$ er et glatt vektorfelt er

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{curl}\vec{F}\cdot\vec{N}\, dS.$$

$$= -\frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi} 1 - \cos 2t \, dt = -\frac{3a^2}{2}\cdot 2\pi + \frac{3a^2}{2}\left[\frac{\sin(2t)}{2}\right]_{t=0}^{2\pi}$$

$$= \underline{\underline{-3a^2\pi}}$$

16.5.5

Bruk Stokes' teorem til å vise at

$$\oint_{\mathcal{C}} y\,dx + z\,dy + x\,dz = \sqrt{3}\,\pi a^2$$

hvor $\mathcal{C}$ er snittet av flatene $x^2+y^2+z^2 = a^2$ og $x+y+z=0$, med "passende orientering".

Med $\oint_{\mathcal{C}} y\,dx + z\,dy + x\,dz$ mener vi $\oint_{\mathcal{C}} \underbrace{(y, z, x)}_{=\vec{F}(x,y,z)} \cdot d\vec{r}$.

Av Stokes' teorem er

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl}\vec{F}\cdot\vec{N}\,dS,$$

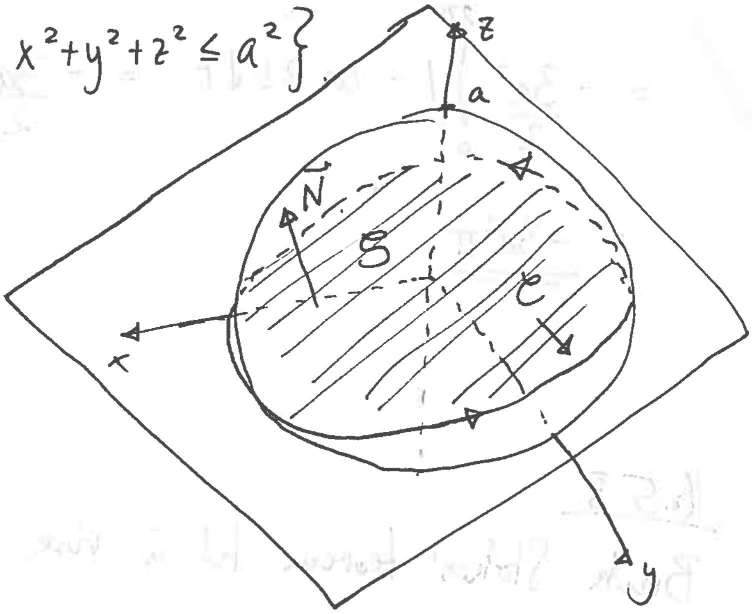
der $\mathcal{S}$ er en hvilken som helst flate med kant $\mathcal{C}$. Vi har

$$\operatorname{curl}\vec{F} = \left(\frac{\partial x}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$= -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} = -(1, 1, 1)$$

Den delen av $x+y+z=0$ som ligger inni kula $x^2+y^2+z^2 \le a^2$ har kant $\mathcal{C}$. Vi har

$\mathcal{S} = \{(x,y,z) : x+y+z=0,\ x^2+y^2+z^2 \leq a^2\}$



$\mathcal{S}$ har normal

$\vec{n} = \nabla(x+y+z) = (1,1,1)$,

og enhetsnormal

$\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.

Altså er

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl}\vec{F}\cdot\vec{N}\,dS = \iint_{\mathcal{S}} -(1,1,1)\cdot(1,1,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\,dS$$

$$= -\frac{3}{\sqrt{3}}\iint_{\mathcal{S}} dS. = -\sqrt{3}\ \text{areal}(\mathcal{S})$$

$\mathcal{S}$ er en disk gjennom origo med radius a^2, så areal$(\mathcal{S}) = \pi a^2$. Altså er

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\sqrt{3}\pi a^2.$$

Om vi hadde orientert $\mathcal{C}$ <u>andre veien</u> ville vi fått

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \sqrt{3}\pi a^2.$$