TMA4105 Matematikk 2
Skriftlig innlevering 3

Våren 2015

1 Et område $S \subset \mathbb{R}^2$ er slik at

$$\iint_S f(x,y)\,dA = \int_0^2 \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$$

for alle integrerbare funksjoner $f\colon S \to \mathbb{R}$.

a) Skissér området S.

b) Beregn dobbeltintegralet når

$$f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}.$$

Hint: Bruk polarkoordinater og husk at $\sin^3\theta = (1-\cos^2\theta)\sin\theta$.

2 La C_1 være enhetssirkelen $x^2+y^2=1$, og la C_2 være kurven med ligning $r = 2/\sqrt{2-\cos\theta}$ i polarkoordinater, begge kurver orientert med positiv omløpsretning. La R betegne området mellom C_1 og C_2.

a) Vis at

$$\oint_{C_1} \frac{-y}{(x^2+y^2)^2}\,dx + \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\,dy = 2\pi$$

og at

$$\iint_R \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy = \frac{\pi}{2}.$$

b) Bruk resultatene fra punkt (a) og Greens teorem til å beregne linjeintegralet

$$\oint_{C_2} \frac{-y}{(x^2+y^2)^2}\,dx + \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\,dy.$$