Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4105 Matematikk 2 Vår 2014

Løsningsforslag — Øving 11

15.3.11 Massesenteret er $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{1}{M}(M_{x=0}, M_{y=0}, M_{z=0})$. Massen er gitt ved

$$\begin{aligned} M &= \int_{t=0}^{t=2\pi} \delta(x,y,z)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^{2\pi} t\sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + 1^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} t\sqrt{2}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\sqrt{2}\pi^2. \end{aligned}$$

Momentene er

$$\begin{aligned} M_{x=0} &= \int_0^{2\pi} x\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \cos(t)t\sqrt{2}\,\mathrm{d}t = 0, \\ M_{y=0} &= \int_0^{2\pi} y\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \sin(t)t\sqrt{2}\,\mathrm{d}t = -2\sqrt{2}\pi, \\ M_{z=0} &= \int_0^{2\pi} z\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} t^2\sqrt{2}\,\mathrm{d}t = 8\sqrt{2}\pi^3/3. \end{aligned}$$

Følgelig er

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, -1/\pi, 4\pi/3)\,.$$

15.3.15 Sylinderen kan parametriseres med $x = a\cos(t)$, $y = a\sin(t)$, og siden vi er ute etter punktene der $y = z$, ser vi at en mulig parametrisering av $\mathcal{C}$ er

$$(a\cos(t), a\sin(t), a\cos(t)), \qquad 0 \le t \le \pi/2,$$

der domenet til t er valgt slik at vi plukker ut delen i første oktant. Vi får da

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} z\,\mathrm{d}s &= a^2 \int_0^{\pi/2} \cos(t)\sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + (-\sin(t))^2}\,\mathrm{d}t \\ &= a^2 \int_0^{\pi/2} \cos(t)\sqrt{1 + \sin^2(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= a^2 \int_0^1 \sqrt{1+v^2}\,\mathrm{d}v, \end{aligned}$$

der vi brukte substitusjonen $v = \sin(t)$. Substitusjonen $v = \sinh(p)$, samt identiteten $1 + \sinh^2(p) = \cosh^2(p)$, gir så

$$\begin{aligned} a^2 \int_0^1 \sqrt{1+v^2}\,\mathrm{d}v &= a^2 \int_0^{\sinh^{-1}(1)} \cosh^2(p)\,\mathrm{d}p \\ &= a^2 \left[\frac{1}{2}\cosh(x)\sinh(x) + \frac{1}{2}x\right]_0^{\sinh^{-1}(1)} \\ &= a^2 \left[\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sinh^{-1}(1)\right]. \end{aligned}$$

15.4.6 De tre linjesegmentene kan parametriseres som

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} t\mathbf{i} & 0 \le t \le 1, \\ \mathbf{i} + (t-1)\mathbf{j} & 1 \le t \le 2, \\ \mathbf{i} + \mathbf{j} + (t-2)\mathbf{k} & 2 \le t \le 3. \end{cases}$$

Langs første linjesegment er $\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{i}\,\mathrm{d}t$ og $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \mathbf{F}(0,0,t) = (t\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - t\mathbf{k})$, og vi får tilsvarende uttrykk for de to andre segmentene. Flyten av $\mathbf{F}$ langs $\mathbf{r}$ er da gitt ved

$$\begin{aligned} \int \mathbf{F}\cdot\,\mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_0^1 (t\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - t\mathbf{k})\cdot\mathbf{i}\,\mathrm{d}t \\ &\quad + \int_1^2 (\mathbf{i} + (t-1)\mathbf{j} - (1+(t-1))\mathbf{k})\cdot\mathbf{j}\,\mathrm{d}s \\ &\quad + \int_2^3 ((1-(t-2))\mathbf{i} + (1-(t-2))\mathbf{j} - 2\mathbf{k})\cdot\mathbf{k}\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2 = -1. \end{aligned}$$

En alternativ løsning er å observere at feltet er konservativt: $\mathbf{F}(x,y,z) = \nabla\left(\frac{x^2+y^2}{2} - xz - yz\right)$, så flyten blir

$$\left[\frac{x^2+y^2}{2} - xz - yz\right]_{(x,y,z)=(0,0,0)}^{(1,1,1)} = -1.$$

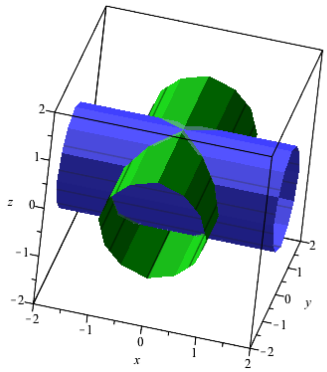
15.4.12 Ved inspeksjon[1] finner vi $\mathbf{F}(x,y,z) = \nabla\left(y^2\sin(x) + xz^3 - 4y + 2z\right)$. Det følger at arbeidet W som gjøres av kraftfeltet er gitt ved

$$W = \left[y^2\sin(x) + xz^3 - 4y + 2z\right]_{(x,y,z)=(0,1,-1)}^{(\pi/2,-1,2)} = 1 + 4\pi + 8 + 6 = 15 + 4\pi.$$

15.4.21 Siden $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$, følger det at fg er et potensial for vektorfeltet $\mathbf{F} = f\nabla g + g\nabla f$. Derfor er

$$\int \mathbf{F}\cdot\,\mathrm{d}\mathbf{r} = f(Q)g(Q) - f(P)g(P).$$

[1] Ved å se på komponentene til $\mathbf{F}$, kan en få mistanke om at vi har å gjøre med et konservativt felt. Dette kan bekreftes f.eks. ved å løse $\phi_x = F_1$, $\phi_y = F_2$, $\phi_z = F_3$ suksessivt.



Figur 1: Situasjonen for $a = 1$. Oppgaven er å finne det grønne arealet inni den blå sylinderen.

15.5.10 Grunnet symmetri er delene av arealet på hver side av yz-planet like, så vi kan nøye oss med å beregne den delen av flaten som har positiv x-koordinat; se Figur 1. Kall denne delen $\mathcal{S}_{x+}$. $\mathcal{S}_{x+}$ projisert ned på yz-planet er disken $D = \{(0, y, z) : y^2 + z^2 \leq a^2\}$, og er grafen av $G(x, z) = \sqrt{a^2 - x^2 + z^2}$ for $(x, z) \in D$. Vi bruker så formelen for arealet av en graf:

$$\begin{aligned} 2\iint_{\mathcal{S}_{x+}} \mathrm{d}S &= 2\iint_D \sqrt{1 + 0^2 + \frac{z^2}{a^2 - z^2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= 2\iint_D \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - z^2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= 4\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - z^2}\sqrt{\frac{a^2}{a^2 - z^2}}\,\mathrm{d}z \\ &= 8a^2. \end{aligned}$$

15.5.14 La E være projeksjonen ned i xy-planet. E består av de (x, y, z) som tilfredstiller

$$1 + y \geq \sqrt{2(x^2 + y^2)},$$

eller

$$1 \geq x^2 + \left(\frac{y - 1}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

Vi bruker så formelen for arealet av en graf:

$$\begin{aligned} \int_E \sqrt{1 + \frac{2x^2}{x^2 + y^2} + \frac{2y^2}{x^2 + y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_E \sqrt{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \sqrt{6}\pi, \end{aligned}$$

der vi brukte at arealet til en ellipse med semiakser a og b er πab (som kan utledes ved integrasjon).

15.5.22 Arealet av sfære-segmentet er $A = \frac{1}{8}4\pi a^2 = \pi a^2/2$. Ved symmetri er $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$, så vi trenger bare å finne $M_{z=0}$. Siden sfære-segmentet er grafen til funksjonen

$$f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \qquad (x, y) \in D,$$

der D er den delen av sirkeldisken gitt ved $x^2 + y^2 \leq a^2$ som ligger i første kvadrant. Vi bruker så (nok en gang) formelen for arealet til flatesegmenter $\mathrm{d}S$ av en graf:

$$\begin{aligned} M_{z=0} &= \iint z \,\mathrm{d}S \\ &= \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \\ &= \int_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2}} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \\ &= a\frac{\pi a^2}{4}. \end{aligned}$$

Altså er

$$\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = \frac{M_{z=0}}{A} = \frac{a}{2}.$$