Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4105
Matematikk 2
Vår 2014

Løsningsforslag — Øving 4

$\boxed{1}$ La $\hat{\mathbf{N}}$ være den oppadrettede enhetsnormalen til det elliptiske skallet

$$\mathcal{S}: \quad 4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 16, \quad z \geq 0,$$

og la

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + (x^2 + y^4)^{(3/2)} \sin(e^{\sqrt{|xyz|}})\mathbf{k}.$$

Finn verdien av

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{curl}(\mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS.$$

Løsning: Uttrykket vi søker verdien av ser ikke enkelt ut å evaluere direkte. Fordi uttrykket matcher ene siden av Stokes' teorem er det naturlig å bruke dette teoremet til å finne verdien på en enklere måte.

`ALTERNATIV 1:` Ved en anvendelse av Stokes' teorem er verdien av uttrykket også gitt ved

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

der $\mathcal{C}$ er den lukkede randkurven av $\mathcal{S}$. $\mathcal{C}$ er gitt som skjæringskurven av $\mathcal{S}$ og xy-planet ($z = 0$). Dermed

$$\mathcal{C}: \quad 4x^2 + 9y^2 = 16, \quad z = 0,$$

som er en ellipse i xy-planet. Et naturlig valg av parametrisering av $\mathcal{C}$ er

$$\mathbf{r}(t) = \left[2\cos t, \frac{4}{3}\sin t, 0\right], \quad t \in [0, 2\pi].$$

Vi deriverer og finner hastigheten

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left[-2\sin t, \frac{4}{3}\cos t, 0\right], \quad t \in [0, 2\pi].$$

Legg merke til at z komponenten av hastigheten er 0. Dermed vil ikke den kompliserte z-komponenten av F dukke opp i linjeintegralet. Vi beregner nå linjeintegralet på normal måte.

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(x(t),y(t),z(t))\cdot \mathbf{v}(t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} y(t)v_x(t) + [x(t)]^2 v_y(t) + 0\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{4}{3}\sin t\right)(-2\sin t) + (2\cos t)^2\left(\frac{4}{3}\cos t\right)\,dt \\
&= \frac{4}{3}\int_0^{2\pi} -2\sin^2 t + 4\cos^3 t\,dt \\
&= \frac{4}{3}\int_0^{2\pi} (\cos 2t - 1) + 4\cos t(1-\sin^2 t)\,dt \\
&= \frac{4}{3}\left[\left(\frac{1}{2}\sin 2t - t\right) + 4\left(\sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t\right)\right]_0^{2\pi} \\
&= -\frac{8}{3}\pi
\end{aligned}$$

`ALTERNATIV 2:` Ved å anvende Stokes' teorem to ganger har vi at

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{curl}(\mathbf{F})\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS = \iint_{\tilde{\mathcal{S}}} \mathbf{curl}(\mathbf{F})\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS$$

der $\tilde{\mathcal{S}}$ er ellipseflaten gitt ved

$$\tilde{\mathcal{S}}:\quad 4x^2+9y^2 \le 16,\quad z=0.$$

Dette fordi flatene har samme randkurve $\mathcal{C}$. $\tilde{\mathcal{S}}$ har konstant oppadrettet enhetsnormalvektor $\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{k}$. Følgelig er

$$\mathbf{curl}(\mathbf{F})\cdot\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{curl}(\mathbf{F})\cdot\mathbf{k} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2x-1.$$

For å beregne flateintegralet av denne funksjonen merker vi oss at $\tilde{\mathcal{S}}$ ligger i xy-planet og er symmetrisk om y-aksen. Følgelig har vi

$$\begin{aligned}
\iint_{\tilde{\mathcal{S}}} \mathbf{curl}(\mathbf{F})\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS &= \iint_{4x^2+9y^2\le 16} 2x-1\,dxdy \\
&= 2\iint_{4x^2+9y^2\le 16} x\,dxdy - \iint_{4x^2+9y^2\le 16} dxdy \\
&= 0 - \iint_{4x^2+9y^2\le 16} dxdy = -2\cdot\frac{4}{3}\pi = -\frac{8}{3}\pi.
\end{aligned}$$

Her er det første integralet lik 0 av symmetrien nevnt over. Det andre integralet er arealet av flaten, som er en ellipse med halvakser 2 og 4/3. Formelen for arealet av en ellipse med halvakser a og b er velkjent, $A = ab\pi$. Alternativt kan man også se dette ved å f.eks. gjøre variabelbyttet $u = \frac{3}{2}y$, og bruke formelen for arealet av en sirkel.

$\boxed{2}$ Definer det tykke kuleskallet

$$D: \quad 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4.$$

La

$$\mathbf{G}(x, y, z) = (5x^3 + 12xy^2)\mathbf{i} + (y^3 + e^y \sin(z))\mathbf{j} + (5z^3 + e^y \cos(z))\mathbf{k}.$$

a) Er $\mathbf{G}$ konservativt i D?

Løsning: Skal $\mathbf{G}$ være konservativt i D må vi blant annet ha

$$\frac{\partial G_2}{\partial x} = \frac{\partial G_1}{\partial y},$$

for alle punkter i D. Siden

$$\frac{\partial G_2}{\partial x} = 0, \quad \text{men} \quad \frac{\partial G_1}{\partial y} = 24xy,$$

er dette kravet ikke oppfylt for punkter i D med $x, y \neq 0$. $\mathbf{G}$ er dermed **ikke** konservativt i D.

b) Beregn fluksen til $\mathbf{G}$ ut av D.

Løsning: Å beregne fluksen ut av flaten direkte virker vanskelig. Her er det naturlig å prøve å bruke divergensteoremet istedenfor. Vi beregner

$$div(\mathbf{G}) = \nabla \cdot \mathbf{G} = 15x^2 + 12y^2 + 3y^2 + e^y \sin(z) + 15z^2 - e^y \sin(z) = 15(x^2 + y^2 + z^2)$$

Både kuleskallet og $div(\mathbf{G})$ har sfærisk symmetri. Vi går derfor over til kulekoordinater, (R, ϕ, θ), for å beregne volumintegralet. D er da beskrevet med ulikhetene

$$1 \leq R \leq 2, \quad 0 \leq \phi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

med

$$div(\mathbf{G}) = 15R^2.$$

Fluksen ut av området D er gitt ved

$$\begin{aligned}\iiint_D div(\mathbf{G})\, dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_1^2 15R^2 \cdot R^2 \sin\phi \, dR \, d\phi \, d\theta \\ &= 15 \int_1^2 R^4 \, dR \int_0^{\pi} \sin\phi \, d\phi \int_0^{2\pi} d\theta = 15\frac{1}{5}(2^5 - 1) \cdot 2 \cdot 2\pi = 372\pi.\end{aligned}$$