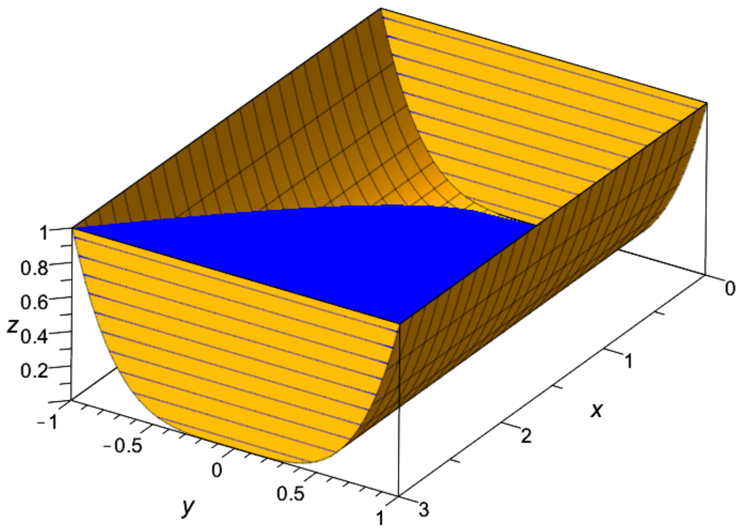
TMA4105
Matematikk 2
Vår 2014

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 3

1 Trauet i figuren har bunn gitt ved $z = y^4$ for $|y| \leq 1$, og ender i $x = 0$ og $x = 3$. Still opp og løs et trippelintegral for volumet av trauet. Trauet var helt fylt med vann, men så kommer noen og løfter den ene enden så vannflaten akkurat når bunnen av den ene endeflaten, mens vannet står til toppen av den andre endeflaten. Hvor stor brøkdel av vannet er igjen?



Figur 1: Trauet på skrå i oppgave 1.

Løsning:
`ALTERNATIV 1:` Det enkleste er kanskje å ha x-integralet innerst og y-integralet ytterst. Volumet av trauet blir

$$V_{\text{fullt}} = \int_{-1}^{1}\int_{y^4}^{1}\int_{0}^{3} dx\,dz\,dy = 3\int_{-1}^{1}\int_{y^4}^{1} dz\,dy = 3\int_{-1}^{1}(1-y^4)\,dy = 6\left(1-\frac{1}{5}\right) = \frac{24}{5}.$$

Vannflaten med trauet på skrå får ligning $z = x/3$ eller som $x = 3z$. Vannet som er igjen svarer til det som er under denne flaten, som kan uttrykkes som $3z \leq x \leq 3$.

Dermed er volumet av vannet som er igjen

$$\begin{aligned} V_{\text{igjen}} &= \int_{-1}^{1}\int_{y^4}^{1}\int_{3z}^{3} dx\,dz\,dy = \int_{-1}^{1}\int_{y^4}^{1} 3-3z\,dz\,dy \\ &= 3\int_{-1}^{1}\int_{y^4}^{1} dz\,dy - 3\int_{-1}^{1}\int_{y^4}^{1} z\,dz\,dy = \frac{24}{5} - \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} 1-y^8\,dy \\ &= \frac{24}{5} - 3\left(1-\frac{1}{9}\right) = \frac{24}{5} - \frac{24}{9} = \frac{72}{15} - \frac{40}{15} = \frac{32}{15}. \end{aligned}$$

`ALTERNATIV 2:` En annen mulighet er å ha y-intergralet innerst og x-integralet ytterst. Vi legger merke til at $z = y^4$ for $|y| \leq 1$ svarer til kurvene $y = \pm z^{1/4}$ for $0 \leq z \leq 1$. Volumet av trauet blir følgelig

$$V_{\text{fullt}} = \int_0^3\int_0^1\int_{-z^{1/4}}^{z^{1/4}} dy\,dz\,dx = \int_0^3\int_0^1 2z^{1/4}dz\,dx = 2\int_0^3 \left[\frac{4}{5}z^{5/4}\right]_0^1 dx = 2\cdot\frac{4}{5}\cdot 3 = \frac{24}{5}.$$

Vannflaten med trauet på skrå får ligning $z = x/3$. Vannet som er igjen svarer til det som er under denne flaten, altså $0 \leq z \leq x/3$. Dermed er volumet av vannet som er igjen

$$\begin{aligned} V_{\text{igjen}} &= \int_0^3\int_0^{x/3}\int_{-z^{1/4}}^{z^{1/4}} dy\,dz\,dx = \int_0^3\int_0^{x/3} 2z^{1/4}dz\,dx = 2\int_0^3 \left[\frac{4}{5}z^{5/4}\right]_0^{x/3} dx \\ &= \frac{8}{5}\int_0^3 \left(\frac{x}{3}\right)^{5/4} dx = \frac{8\cdot 3}{5}\left[\frac{4}{9}\left(\frac{x}{3}\right)^{9/4}\right]_0^3 = \frac{8\cdot 3\cdot 4}{5\cdot 9} = \frac{32}{15}. \end{aligned}$$

Andelen vann som er igjen blir uansett tidligere framgangsmåte

$$\frac{V_{\text{igjen}}}{V_{\text{fullt}}} = \frac{\frac{32}{15}}{\frac{24}{5}} = \frac{32}{24}\cdot\frac{5}{15} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{9}$$

$\boxed{2}$ La T være legemet i 1. oktant ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$) beskrevet med ulikheten

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2,$$

der massetettheten ρ er gitt ved

$$\rho(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{3/2}.$$

Bestem massesenteret til T.

Løsning:
Legemet T har masse som er fordelt symmetrisk i første oktant ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$) for kulen med radius $R \leq a$. Fra denne symmetrien følger det at massesenteret $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ må tilfredsstille $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$.

Siden både området og massetettheten har sfærisk symmetri, går vi over til sfæriske koordinater (R, ϕ, θ). T er da beskrevet av ulikhetene:

$$0 \leq R \leq a, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

med massetetthet

$$\rho(R, \phi, \theta) = R^3.$$

Massen til T er

$$\begin{aligned} M = \iiint_T dm = \iiint_T \rho\, dV &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^a R^3 \cdot R^2 \sin\phi\, dR\, d\phi\, d\theta \\ &= \int_0^a R^5\, dR \int_0^{\pi/2} \sin\phi\, d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{a^6}{6} \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^6}{12}. \end{aligned}$$

Vi trenger kun å beregne en av koordinatene til massesenteret, og velger $\bar{z}$. Siden

$$\begin{aligned} \iiint_T z\rho\, dV &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^a R\cos\phi \cdot R^3 \cdot R^2 \sin\phi\, dR\, d\phi\, d\theta \\ &= \int_0^a R^6\, dR \int_0^{\pi/2} \cos\phi \sin\phi\, d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \\ &= \int_0^a R^6\, dR \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin 2\phi\, d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \\ &= \frac{a^7}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^7}{28}, \end{aligned}$$

har vi at

$$\bar{z} = \frac{1}{M} \iiint_T z\rho\, dV = \frac{12}{\pi a^6} \cdot \frac{\pi a^7}{28} = \frac{3a}{7}.$$

Massesenteret til T er dermed $\left(\frac{3a}{7}, \frac{3a}{7}, \frac{3a}{7}\right)$.