Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 2

1 Funksjonen f er definert ved

$$f(x, y) = x^3y + xy^2 + 40y.$$

a) Finn og klassifiser de kritiske punktene til f.

Løsning:
Vi finner de første ordens partiellderiverte

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 3x^2y + y^2 = 0 \Rightarrow y = 0 \ \text{ eller } \ y = -3x^2, \\ f_y(x, y) &= x^3 + 2xy + 40 = 0. \end{aligned}$$

Vi undersøker hver av de to mulige løsningene av $f_x(x, y) = 0$.

1. Tilfellet $y = 0$ gir $x^3 = -40$ slik at $(-\sqrt[3]{40}, 0) = (-2\sqrt[3]{5}, 0)$ er et kritisk punkt.
2. Tilfellet $y = -3x^2$ gir at $x^3 - 6x^3 + 40 = 0$. Det vil si $5x^3 = 40$, som gir $x = \sqrt[3]{8} = 2$ slik at $(2, -12)$ er et kritisk punkt.

Flere kritiske punkt finnes ikke.

For å klassifisere disse punktene bruker vi annenderiverttesten: Testfunksjonen

$$\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y) = 6xy \cdot 2x - (3x^2 + 2y)^2$$

gir at

$$\begin{aligned} \Delta(-\sqrt[3]{40}, 0) &= 0 \cdot (-2\sqrt[3]{40}) - 9 \cdot 40^{4/3} = -9 \cdot 40^{4/3} \approx -1231 < 0, \\ \Delta(2, -12) &= (-144) \cdot 4 - (-12)^2 = -720 < 0. \end{aligned}$$

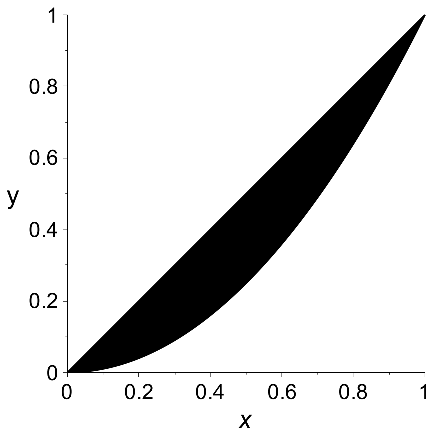
Begge de kritiske punktene er derfor sadelpunkter.

b) Finn største og minste verdi for $f(x, y)$ på området gitt ved

$$x^2 \leq y \leq x.$$

Er disse verdiene også maksimum og minimum for $f(x, y)$ i hele planet?

Løsning:
Siden $x \geq x^2$ kun for $0 \leq x \leq 1$ er det aktuelle området som vist i Figur 1. Området ligger i første kvadrant der $f(x, y)$ vokser med både x og y. Maksimum ligger derfor



Figur 1: Området vi ser på i oppgave 1b.

i punktet $(1, 1)$ der både x og y er størst, mens minimum ligger i punktet $(0, 0)$ der både x og y er minst i området. Største verdi er derfor $f(1, 1) = 42$ og minste verdi er $f(0, 0) = 0$. Disse verdiene kan ikke være maksimum og minimum for $f(x, y)$ i hele planet, siden ingen av dem er kritiske punkter.

2 Kurven C er skjæringskurven mellom to flatene med ligninger

$$x^2 + y^2 - z = 1, \quad xyz = 1.$$

for $x > 0$, $y > 0$ og $z > 0$.

a) Hvilket punkt på C ligger nærmest z-aksen?
(Hint: En mulighet er å minimere $x^2 + y^2$ med to bibetingelser.)

Løsning:
`ALTERNATIV 1:` Vi tar hintet, og forsøker å minimalisere $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ (som er kvadratet av avstanden til z-aksen) med bibetingelsene. $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z - 1$ og $h(x, y, z) = xyz - 1$. Lagranges multiplikatormetode gir $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$ som skrevet ut gir de tre ligningene.

$$\begin{aligned} 2x &= 2\lambda x + \mu yz, \\ 2y &= 2\lambda y + \mu xz, \\ 0 &= -\lambda + \mu xy. \end{aligned}$$

Den siste ligningen gir $\lambda = \mu xy$. Vi setter inn i de to første og får

$$\begin{aligned} 2x &= (2x^2y + yz)\mu, \\ 2y &= (2xy^2 + xz)\mu. \end{aligned}$$

Dette gir videre $2x(2xy^2 + xz) = 2y(2x^2y + yz)$, altså $x^2z = y^2z$. Siden x, y og z alle er positive må $x = y$.

Setter vi inn $y = x$ i bibetingelsene $g = 0$ og $h = 0$ får vi $2x^2 - z = 1$ og $x^2z = 1$. Den siste gir $x^2 = 1/z$ som vi setter inn i den første, og får $2/z - z = 1$. Multiplikasjon med

z og litt rydding gir annengradsligningen $z^2+z-2=0$, med løsninger $z=\frac{1}{2}(-1\pm 3)$. Siden $z>0$ har vi bare løsningen $z=1$. Dette gir $y=x=1/\sqrt{z}=1$, slik at $(x,y,z)=(1,1,1)$ er eneste mulige kandidat for det nærmeste punktet.

`ALTERNATIV 2:` Vi legger merke til at den første flaten, med en ligning som kan skrives

$$x^2+y^2=1+z$$

innebærer at å finne punktet på kurven C med minst avstand til z-aksen er det samme som å finne punktet på kurven med minst z-verdi. Vi skriver ligningen for den andre flaten som

$$xy=\frac{1}{z}$$

Ved å gange denne ligningen med 2 og enten legge den til eller trekke den fra første ligning, får vi disse to ligningene

$$(x+y)^2=1+z+\frac{2}{z},\quad (x-y)^2=1+z-\frac{2}{z}.$$

Spesielt må vi ha $1+z-\frac{2}{z}\geq 0$. Vi finner at den minste positive z verdien hvor ulikheten stemmer er $1+z-\frac{2}{z}=0$ når $z=1$. Dermed blir $z=1$ minste mulige z som kan gi oss en løsning. Ligningssystemet over får da løsningen $x=y=1$. $(x,y,z)=(1,1,1)$ er dermed det nærmeste punktet.

b) Et romskip følger kurven C. Idet romskipet passerer punktet $(1+1/\sqrt{2},1-1/\sqrt{2},2)$ har det en slik hastighet at $dy/dt=1$. Hva er dx/dt og dz/dt i dette øyeblikket?

Løsning:

`ALTERNATIV 1:` De to flatene har normalvektorer gitt ved gradientene til henholdsvis g og h (der g og h er som i alternativ 1, punkt a). En tangentvektor til kurven må stå normalt på begge disse, så den er parallell med kryssproduktet.

$$\nabla g\times\nabla h=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2x & 2y & -1\\ yz & xz & xy\end{vmatrix}=(2xy^2+xz)\mathbf{i}-(2x^2y+yz)\mathbf{j}+(2x^2z-2y^2z)\mathbf{k}.$$

Setter vi inn koordinatene til det gitte punktet, får vi

$$\nabla g\times\nabla h=(3+\frac{1}{2}\sqrt{2})\mathbf{i}+(-3+\frac{1}{2}\sqrt{2})\mathbf{j}+8\sqrt{2}\mathbf{k}.$$

Hastighetsvektoren er parallell med denne, slik at $\nabla g\times\nabla h=\lambda\mathbf{v}$ for en konstant λ. Siden $\mathbf{v}$ har y-komponent 1 får vi ved å se på y-komponentene at $\lambda=-3+\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Ligningene for x og z komponenten gir dermed

$$\frac{dx}{dt}=\frac{3+\frac{1}{2}\sqrt{2}}{-3+\frac{1}{2}\sqrt{2}}=\frac{6+\sqrt{2}}{-6+\sqrt{2}}=-\frac{19+6\sqrt{2}}{17}$$
$$\frac{dz}{dt}=\frac{8\sqrt{2}}{-3+\frac{1}{2}\sqrt{2}}=\frac{16\sqrt{2}}{-6+\sqrt{2}}=-\frac{16+48\sqrt{2}}{17}$$

(Her og i alternativ 2 nedenfor forenkles brøkene ved å multiplisere teller og nevner med $6+\sqrt{2}$.)

`ALTERNATIV 2:` Vi deriverer ligningene for de to flatene med hensyn på t. Notasjonen er $\dot{x} = dx/dt$ osv. Vi får

$$\begin{aligned} 2x\dot{x} + 2y\dot{y} - \dot{z} &= 0, \\ \dot{x}yz + x\dot{y}z + xy\dot{z} &= 0. \end{aligned}$$

Setter vi inn de gitte verdiene (heriblant $\dot{y} = 1$) blir dette

$$\begin{aligned} (2+\sqrt{2})\dot{x} + (2-\sqrt{2}) - \dot{z} &= 0, \\ (2-\sqrt{2})\dot{x} + (2+\sqrt{2}) + \frac{1}{2}\dot{z} &= 0. \end{aligned}$$

Her kan vi for eksempel eliminere $\dot{z}$ ved å gange den siste ligningen med 2 og legge sammen, som gir

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \dot{x} = \frac{6+\sqrt{2}}{-6+\sqrt{2}} = -\frac{19+6\sqrt{2}}{17}, \\ \frac{dz}{dt} &= \dot{z} = -\frac{16+48\sqrt{2}}{17}. \end{aligned}$$

$\dot{z}$ er funnet ved å sette inn svaret for $\dot{x}$ i en av de to ligningene.