Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4105
Matematikk 2
Vår 2014

Løsningsforslag — Øving 1

$\boxed{1}$ La C være kurven gitt ved parametriseringen

$$r(t) = \frac{1}{t}\mathbf{i} + \sqrt{2}t\mathbf{j} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{k}, \quad \frac{1}{2} \le t \le 2.$$

a) Finn buelengden til C.

Løsning:
Buelengden til C er gitt ved

$$S = \int_C ds = \int_{1/2}^{2} |\mathbf{v}(t)| dt$$

Vi deriverer $\mathbf{r}$ og får

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = [-\frac{1}{t^2}, \sqrt{2}, t^2].$$

Vi beregner lengden av $\mathbf{v}$,

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}(t)| &= \sqrt{\frac{1}{t^4} + 2 + t^4} \\ &= \frac{\sqrt{(1+t^4)^2}}{t^2} \\ &= \frac{1}{t^2} + t^2. \end{aligned}$$

Da får vi

$$\begin{aligned} S = \int_{1/2}^{2} |\mathbf{v}(t)| dt &= \int_{1/2}^{2} \frac{1}{t^2} + t^2 dt \\ &= \left[-\frac{1}{t} + \frac{t^3}{3} \right]_{1/2}^{2} \\ &= \frac{33}{8}. \end{aligned}$$

Dermed er buelengden av C $\frac{33}{8}$.

b) Finn enhetstangentvektoren $\mathbf{T}(t)$ og krumningen av C i $\mathbf{r}(1)$

Løsning:
Enhetstangentvektoren $\mathbf{T}(t)$ er gitt ved.

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|}$$

Vi har allerede beregnet $\mathbf{v}(t)$ og $|\mathbf{v}(t)|$ i a), og vi får

$$\mathbf{T}(t) = \frac{t^2}{1+t^4}\left[-\frac{1}{t^2}, \sqrt{2}, t^2\right].$$

Vi har to anvendelige formler og dermed to mulige framgangsmåter for å beregne krumningen.

`ALTERNATIV 1:` Vi bruker krumningsformelen

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{a}(t) \times \mathbf{v}(t)|}{|\mathbf{v}(t)|^3}$$

Vi beregner derfor $\mathbf{a}(t)$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \left[\frac{2}{t^3}, 0, 2t\right].$$

Vi setter inn $t = 1$ og får $\mathbf{a}(1) = [2, 0, 2]$, $\mathbf{v}(1) = [-1, \sqrt{2}, 1]$ og $|\mathbf{v}(1)| = 2$. Derfor i $\mathbf{r}(1)$,

$$\mathbf{a}(1) \times \mathbf{v}(1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & \sqrt{2} & 1 \end{vmatrix} = [-2\sqrt{2}, -4, 2\sqrt{2}],$$

og

$$\kappa(1) = \frac{|\mathbf{a}(1) \times \mathbf{v}(1)|}{|\mathbf{v}(1)|^3} = \frac{4\sqrt{2}}{2^3} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

`ALTERNATIV 2:` Vi bruker krumningsformelen

$$\kappa(t) = \frac{\left|\frac{d\mathbf{T}(t)}{dt}\right|}{\frac{dS(t)}{dt}} = \frac{\left|\frac{d\mathbf{T}(t)}{dt}\right|}{|\mathbf{v}(t)|}.$$

Vi beregner derfor $\frac{d\mathbf{T}(t)}{dt}$

$$\frac{d\mathbf{T}(t)}{dt} = \frac{2t}{(1+t^4)^2}\left[2t^2, \sqrt{2}\left(1-t^4\right), 2t^2\right].$$

Det følger at i $\mathbf{r}(1)$

$$\frac{d\mathbf{T}(1)}{dt} = \frac{2}{2^2}[2, 0, 2] = [1, 0, 1],$$

og krumningen blir

$$\kappa(1) = \frac{\left|\frac{d\mathbf{T}(1)}{dt}\right|}{|\mathbf{v}(1)|} = \frac{\sqrt{1+1}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Krumningen av C i $\mathbf{r}(1)$ er $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\boxed{2}$ **a)** Kurven C er gitt ved

$$r(t) = \sqrt{2}\cos t\,\mathbf{i} + \sqrt{2}\cos t\,\mathbf{j} + 2\sin t\,\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Bestem enhetstangentvektoren $\mathbf{T}$ og krumningen κ i et vilkårlig punkt på C.

Løsning:
Enhetstangentvektoren $\mathbf{T}$ er igjen gitt ved.

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|}$$

Vi deriverer $\mathbf{r}$ og får

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = [-\sqrt{2}\sin t, -\sqrt{2}\sin t, 2\cos t].$$

Lengden av $\mathbf{v}(t)$ blir

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{2\sin^2 t + 2\sin^2 t + 4\cos^2 t} = \sqrt{4} = 2.$$

Ved å sette inn i dette i definisjonen får vi

$$\mathbf{T}(t) = \left[\frac{-\sin t}{\sqrt{2}}, \frac{-\sin t}{\sqrt{2}}, \cos t\right].$$

Vi har igjen to enkle måter å beregne krumningen.

`ALTERNATIV 1:` Krumningsformelen er

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{a}(t) \times \mathbf{v}(t)|}{|\mathbf{v}(t)|^3}.$$

Vi beregner $\mathbf{a}(t)$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt}(t) = [-\sqrt{2}\cos t, -\sqrt{2}\cos t, -2\sin t],$$

$$\mathbf{a}(t) \times \mathbf{v}(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sqrt{2}\cos t & -\sqrt{2}\cos t & -2\sin t \\ -\sqrt{2}\sin t & -\sqrt{2}\sin t & 2\cos t \end{vmatrix} = [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0],$$

og

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{a}(t) \times \mathbf{v}(t)|}{|\mathbf{v}(t)|^3} = \frac{\sqrt{8+8}}{2^3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

`ALTERNATIV 2:` Vi bruker krumningsformelen

$$\kappa(t) = \frac{\left|\frac{d\mathbf{T}(t)}{dt}\right|}{|\mathbf{v}(t)|}.$$

Vi finner $\frac{d\mathbf{T}(t)}{dt}$

$$\frac{d\mathbf{T}(t)}{dt} = \left[\frac{-\cos t}{\sqrt{2}}, \frac{-\cos t}{\sqrt{2}}, -\sin t\right],$$

og krumningen blir

$$\kappa(t) = \frac{\left|\frac{d\mathbf{T}(t)}{dt}\right|}{|\mathbf{v}(t)|} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}\cos^2 t + \frac{1}{2}\cos^2 t + \sin^2 t}}{2} = \frac{1}{2}.$$

b) Vis at C er skjæringskurven mellom en kuleflate og et plan. Bestem sentrum og radius i sirkelen C.

Løsning:
Hvis vi skriver $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$, har vi at

$$x(t) = y(t) = \sqrt{2}\cos t.$$

Dermed ligger kurven i planet $x = y$. Videre har vi at

$$x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 = 4\sin^2 t + 4\cos^2 t = 4.$$

Kurven ligger dermed også på kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Fordi C er en lukket kurve utgjør den hele skjæringskurven mellom disse to flatene. Siden planet $x = y$ går gjennom kulens sentrum (origo), er C en storsirkel på kuleflaten. Det følger at sirkelen C har samme radius og sentrum som kulen, altså radius 2 og sentrum i origo.