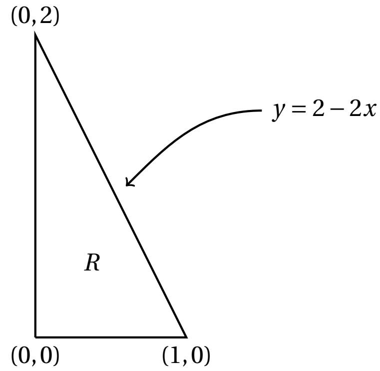
Eksamen i TMA4105 Matematikk 2
8. juni 2011

Løsningsforslag

1 Tegner først området vi skal integrere over.



Finner så massen:

$$m = \iint_R \mathrm{d}m = \iint_R \delta\,\mathrm{d}A = \int_0^1 \int_0^{2-2x} y^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}.$$

Senteroiden (lik tyngdepunktet, lik massesenteret) er punktet $(\bar{x}, \bar{y})$ der

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iint_R x\,\mathrm{d}m = \frac{3}{2}\iint_R xy^2\,\mathrm{d}A = \frac{3}{2}\int_0^1 \int_0^{2-2x} xy^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5},$$
$$\bar{y} = \frac{1}{m}\iint_R y\,\mathrm{d}m = \frac{3}{2}\iint_R y^3\,\mathrm{d}A = \frac{3}{2}\int_0^1 \int_0^{2-2x} y^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{6}{5}.$$

2 Vi ser på hva som skjer med grensen hvis vi går langs kurven $y = kx^2$ der k er en konstant. Dette gir

$$\frac{2x^8}{y^4 + x^8} = \frac{2x^8}{k^4x^8 + x^8} = \frac{2}{k^4 + 1}.$$

Altså vil grenseverdien når $(x, y) \to (0,0)$ avhenge av k når vi går langs kurven $y = kx^2$, hvilket igjen betyr at

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^8}{y^4 + x^8}$$

ikke eksisterer.

3 En parameterfremstilling for kurven er gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Det gir

$$\mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j},$$

slik at

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{|\mathbf{v}(t)|}\mathbf{v}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}(\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j}).$$

Gitt en vektor $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ i planet, så gjelder det at $\pm(-b\mathbf{i} + a\mathbf{j})$ står normalt på $\mathbf{u}$. Da enhetsnormalvektoren står normalt på enhetstangentvektoren (og skal peke mot den siden kurven krummer), har vi at

$$\mathbf{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}(-2t\,\mathbf{i} + \mathbf{j}).$$

Krumningen til en kurve gitt ved $y = f(x)$ er gitt ved

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{\left[1 + \left(f'(x)\right)^2\right]^{3/2}}.$$

I vårt tilfelle gir det at

$$\kappa(x) = \frac{2}{(1+4x^2)^{3/2}}.$$

Vi er bedt om finne krumningen og enhetsnormalvektoren i punktet $(x, y) = (1,1)$, som svarer til å sette $x = t = 1$. Det vil si,

$$\kappa(1) = \frac{2}{5^{3/2}}, \quad \text{og} \quad \mathbf{N}(1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2\mathbf{i} + \mathbf{j}).$$

$\boxed{4}$ **a)** Ligningen for tangentplanet til

$$z = f(x, y) = 100 - \frac{1}{3\sqrt{2}}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{3}y^2,$$

i punktet $(-1, 1, 100 - 1/\sqrt{2})$ er gitt ved

$$z - \left(100 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f_x(-1,1)(x+1) + f_y(-1,1)(y-1).$$

Da

$$f_x(x, y) = -\frac{\sqrt{2}}{3}x, \quad \text{og} \quad f_y(x, y) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}y,$$

får vi at ligningen for tangetplanet er

$$-\frac{\sqrt{2}}{3}x + \frac{2\sqrt{2}}{3}y + z = 100 + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b) Hvis vi beveger oss i retning sørøst beveger vi oss i retningen til vektoren

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - \mathbf{j}).$$

Den retningsderiverte til $f(x, y)$ langs $\mathbf{u}$ i punktet $(-1, 1)$ er så

$$D_{\mathbf{u}} f(-1,1) = \nabla f\big|_{(-1,1)} \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$

Altså skråner terrenget med en vinkel

$$\theta = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

$\boxed{5}$ La $f(x, y) = x^2 + y^2$ og $g(x, y) = 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8$, slik at

$$\nabla f = 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j},$$
$$\nabla g = (10x + 6y)\,\mathbf{i} + (6x + 10y)\,\mathbf{j}.$$

Lagrange multiplikatormetode gir så

$$\nabla f = \lambda \nabla g,$$

det vil si,

$$x = \lambda(5x + 3y), \tag{1}$$
$$y = \lambda(3x + 5y). \tag{2}$$

Anta at $5x+3y=0$. Da gir (1) at $x=0$, som ved antagelsen om at $5x+3y=0$ gir at $y=0$. Anta at $3x+5y=0$. Da gir (2) at $y=0$, som ved antagelsen om at $3x+5y=0$ gir at $x=0$. Ettersom $g(0,0)=-8\neq 0$ kan vi se bort fra $x=y=0$.

Fra (1) og (2) får vi

$$\lambda = \frac{x}{5x+3y} = \frac{y}{3x+5y}. \tag{3}$$

Ligning (3) gir så $3x^2+5xy=3y^2+5xy$, det vil si $x^2=y^2$.

La så $y=x$. Innsatt i $g(x,y)$ gir dette

$$g(x,x)=5x^2+6x^2+5x^2-8=16x^2-8=0,$$

det vil si $x=\pm 1/\sqrt{2}$, som igjen gir

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

La så $y=-x$. Innsatt i $g(x,y)$ gir dette

$$g(x,-x)=5x^2-6x^2+5x^2-8=4x^2-8=0,$$

det vil si $x=\pm\sqrt{2}$, som igjen gir

$$f\left(\pm\sqrt{2},\mp\sqrt{2}\right)=2+2=4.$$

Avstanden fra origo til kurven $5x^2+6xy+5y^2=8$ er gitt ved $h(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{f(x,y)}$. Den største avstanden fra origo til kurven er dermed $\sqrt{4}=2$, og den minste avstanden er $\sqrt{1}=1$.

6 **a)** Fra definisjonen til curl får vi

$$\operatorname{curl}\mathbf{F}=\nabla\times\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 2xye^{x^2} & e^{x^2} & 2z\end{vmatrix}=\mathbf{0}.$$

Ettersom $\mathbf{F}$ er definert for alle $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ og $\operatorname{curl}\mathbf{F}=\mathbf{0}$, så er $\mathbf{F}$ et konservativt vektorfelt (jamfør læreboken side 912).

b) Fra **a)** vet vi at $\mathbf{F}$ er konservativt, det vil si at

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,\mathrm{d}s=\int_L \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,\mathrm{d}s$$

der L er den rette linjen fra $(1,0,0)$ til $(-1,0,\pi)$.

En parameterfremstilling for L er

$$\mathbf{r}(t)=(1-2t)\,\mathbf{i}+\pi t\,\mathbf{k},\quad 0\le t\le 1.$$

Fra uttrykket for $\mathbf{r}(t)$ finner vi

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}=-2\,\mathbf{i}+\pi\,\mathbf{k},$$

slik at

$$\mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big)\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}=\big(e^{(1-2t)^2}\,\mathbf{j}+2\pi t\,\mathbf{k}\big)\cdot\big(-2\,\mathbf{i}+\pi\,\mathbf{k}\big)=2\pi^2 t.$$

Dermed får vi

$$\int_L \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,\mathrm{d}s=\int_0^1 \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big)\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t=\int_0^1 2\pi^2 t\,\mathrm{d}t=\pi^2.$$

7 **a)** Vi innfører sylinderkoordinater. Vi deler opp T i to biter, T_1 og T_2 der

$$T_1\ :\ \sqrt{r^2-4}\le z\le\sqrt{5},\quad 2\le r\le 3,\quad 0\le\theta\le 2\pi,$$

og T_2 er sylinderen med radius 2 og høyde $\sqrt{5}$,

$$T_2\ :\ 0\le z\le\sqrt{5},\quad 0\le r\le 2,\quad 0\le\theta\le 2\pi.$$

Volumet til T er så

$$V=\iiint_T \mathrm{d}V=\iiint_{T_1}\mathrm{d}V+\iiint_{T_2}\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\int_2^3\int_{\sqrt{r^2-4}}^{\sqrt{5}}\mathrm{d}z\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta+\pi\cdot 2^2\cdot\sqrt{5}=\frac{17}{3}\pi\sqrt{5}.$$

b) La S' betegne overflaten til legemet T. Da sier divergensteoremet at

$$\iint_{S'} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,\mathrm{d}V.$$

Divergensen til $\mathbf{F}$ er gitt ved

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla\cdot\mathbf{F} = 1+1+1 = 3,$$

slik at

$$\iint_{S'} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma = 3\iiint_T \mathrm{d}V \overset{\textbf{a)}}{=} 17\pi\sqrt{5}.$$

Flaten S' er flaten S limt sammen med flatene D_1 og D_2, der

$$D_1 \quad : \quad z=\sqrt{5}, \quad 0\le r\le 3, \quad 0\le\theta\le 2\pi,$$

og

$$D_2 \quad : \quad z=0, \quad 0\le r\le 2, \quad 0\le\theta\le 2\pi.$$

Ettersom $\mathbf{n}$ skal peke ut av T har vi

$$\begin{aligned}
&\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma \\
&\qquad = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{k}\,\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} \mathbf{F}\cdot(-\mathbf{k})\,\mathrm{d}\sigma \\
&\qquad = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_1} (z-x)\,\mathrm{d}\sigma - \iint_{D_2} (z-x)\,\mathrm{d}\sigma \\
&\qquad = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_1} (\sqrt{5}-x)\,\mathrm{d}\sigma - \iint_{D_2} (0-x)\,\mathrm{d}\sigma \\
&\qquad = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma + \sqrt{5}\iint_{D_1} \mathrm{d}\sigma - \underbrace{\iint_{D_1} x\,\mathrm{d}\sigma}_{=0 \text{ ved symmetri}} + \underbrace{\iint_{D_2} x\,\mathrm{d}\sigma}_{=0 \text{ ved symmetri}} \\
&\qquad = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma + \sqrt{5}\cdot\pi\cdot 3^2 \\
&\qquad = 17\pi\sqrt{5},
\end{aligned}$$

det vil si

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma = 8\pi\sqrt{5}.$$