Oppgåve 1 La

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{for } x \leqslant 2, \\ x^2, & \text{for } x > 2. \end{cases}$$

Avgjer om følgande grenseverdiar eksisterer eller ikkje:

$$\lim_{x \to 2+} f(x), \qquad \lim_{x \to 2-} f(x), \qquad \lim_{x \to 2} f(x).$$

Er $f(x)$ kontinuerleg?

Oppgåve 2 La S vere området i xy-planet som er avgrensa av kurvene $y = x^3$ og $y = \sqrt{x}$ mellom $x = 0$ og $x = 1$.

Skisser området S.

Finn volumet av omdreiingslekamen som oppstår ved å dreie S om y-aksen.

Oppgåve 3 La $x > 1$. Rekn ut

$$\int \frac{\ln(\ln(x))}{x}\, dx.$$

(Vink: Du kan få bruk for at $\int \ln(x)\, dx = \int 1 \cdot \ln(x)\, dx$ og delvis integrasjon.)

Oppgåve 4 La C vere eit reelt tall og la funksjonen $f(x)$ vere gjeve som

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x) - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}, & \text{for } x \neq 0, \\ C, & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

Bestem C slik at $f(x)$ er kontinuerleg i $x = 0$.

Oppgåve 5 La

$$F(x) = \int_0^{2x - x^2} \cos\left(\frac{1}{1 + t^2}\right) dt.$$

Rekn ut $F'(x)$.

Vis at $F(x)$ har eit globalt maksimum i $x = 1$.

Oppgåve 6 Vis at bogelengda L til grafen til funksjonen

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right), \qquad \text{for } x \in [1, 2],$$

kan skrivast som

$$L = \int_1^2 \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}\, dx.$$

Rekn ut L.

(Vink: Vis først at $f'(x) = 1/\sinh(x)$.)

Oppgåve 7 Avgjer om rekkene konvergerer absolutt, konvergerer vilkårsbundet eller divergerer:

$$(i)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+11}, \qquad (ii)\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{e^n}, \qquad (iii)\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+2\sqrt{n}}.$$

Oppgåve 8 Finn taylorrekka om $x = 0$ til funksjonen

$$F(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\, dt.$$

For kva verdiar av x konvergerer taylorrekka?

Oppgåve 9 Finn ei implisitt likning for ei kurve $y = y(x)$ som passerer gjennom $(\ln(2), 0)$ og som har stigning i kvart punkt (x, y) gjeve ved

$$\frac{e^{-x}}{1+\cos(y)}.$$

Oppgåve 10 Sindre har fått i oppgåve å vise at

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{1}$$

Erna har vist han følgande framgangsmåte:

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = \left(\frac{d}{dt}\ln(t)\right)\Big|_{t=1} = 1.$$

Hjelp Sindre med å forstå Erna sin framgangsmåte ved å forklare han kvifor kvar enkelt likskap held.

Forklar òg korleis Sindre til slutt kan vise likning (1).