1 La $h(x) = f(x) - g(x) = \ln(x) - x^2 + 2$. Vi ønsker å vise at $h(x)$ har minst en rot for $x \in [1, 2]$. Siden $h(x)$ er en sum av kontinuerlige funksjoner er den en kontinuerlig funksjon. Videre er

$$h(1) = 1 > 0, \qquad h(2) = \ln(2) - 4 + 2 = \ln(2) - 2 < 0.$$

Skjæringssetningen gir derfor at det finnes minst en rot av $h(x)$ for $x \in [1, 2]$.

2 La $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$. Feilestimatet for trapesmetoden gir

$$\left| \int_0^2 f(x)dx - T_n \right| \leqslant \frac{K(2-0)^3}{12n^2} = \frac{2K}{3n^2},$$

hvor K er slik at $|f''(x)| \leqslant K$. Vi deriverer og dobbeltderiverer derfor $f(x)$:

$$f'(x) = (-1)(1 + x^2)^{-2} 2x,$$

$$f''(x) = -2(1 + x^2)^{-2} + 4x(1 + x^2)^{-3} 2x = \frac{-2(1 + x^2) + 8x^2}{(1 + x^2)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(1 + x^2)^3}.$$

Fra oppgaveteksten er derfor $K = 2$, og vi trenger da å finne n slik at

$$\frac{4}{3n^2} < 10^{-6} \qquad \Longleftrightarrow \qquad n > \sqrt{\frac{4}{3}10^6} = \frac{2}{\sqrt{3}}10^3 \approx 1154.7.$$

Altså kan vi velge $n = 1155$ for å få feilen garantert mindre enn 10^{-6}.

3 For å finne arealet til rotasjonsflaten integrerer vi følgende infinitesmale del fra $x = 0$ til $x = 2/3$:

$$2\pi r ds,$$

der r er avstanden fra rotasjonslinjen til grafen og ds er buelengdedifferensialet. I vårt tilfelle er $r = x^3$ og $ds = \sqrt{1 + (3x^2)^2}dx$. Med substitusjonen $u = 9x^4$ og deretter $v = 1 + u$ gir dette

$$2\pi \int_0^{2/3} x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2}\, dx = 2\pi \int_0^{2/3} x^3 \sqrt{1 + 9x^4}\, dx = \frac{2\pi}{36} \int_0^{16/9} \sqrt{1 + u}\, du = \frac{2\pi}{36} \int_1^{25/9} v^{1/2} dv$$
$$= \frac{2\pi}{36} \left[\frac{2}{3} v^{3/2} \right]_{v=1}^{v=25/9} = \frac{98\pi}{729}.$$

4 Vi setter punktet $(x, y) = (e, e^{-1})$ inn på venstre side av likheten for å få

$$e^{xy} \ln\left(\frac{x}{y}\right) = e^1 \ln\left(e^2\right) = 2e,$$

og på høyre side av likheten for å få

$$x + \frac{1}{y} = e + e = 2e.$$

Dermed ligger punktet (e, e^{-1}) på den implisitt gitte kurven.

For å finne stigningstallet til kurven, deriverer vi venstre side av uttrykket for kurven implisitt mhp. x

$$\frac{d}{dx}\left(e^{xy} \ln\left(\frac{x}{y}\right)\right) = e^{xy}\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) \ln\left(\frac{x}{y}\right) + e^{xy}\frac{y}{x}\left(\frac{y - x\frac{dy}{dx}}{y^2}\right),$$

og så høyre side av uttrykket

$$\frac{d}{dx}\left(x+\frac{1}{y}\right)=1-\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}.$$

Vi forenkler den videre utregningen ved å sette inn punktet $(x,y)=(e,e^{-1})$ i uttrykkene våre. Dette gir

$$\begin{aligned} e\left(e^{-1}+e\frac{dy}{dx}\right)\ln(e^2)+e\frac{1}{e^2}\left(\frac{e^{-1}-e\frac{dy}{dx}}{e^{-2}}\right)&=1-\frac{1}{e^{-2}}\frac{dy}{dx}.\\ 2+2e^2\frac{dy}{dx}+1-e^2\frac{dy}{dx}&=1-e^2\frac{dy}{dx}.\\ \frac{dy}{dx}&=-e^{-2}. \end{aligned}$$

Altså er stigningstallet lik $-e^{-2}$ i punktet (e,e^{-1}).

5 Vi legger merke til at når $x\to 0$ blir brøken et "0/0"-uttrykk. Ved l'Hopitals regel får vi da

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x/2}-1-\sin(ax)}{(e^{x/2}-1)\sin(ax)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}e^{x/2}-a\cos(ax)}{\frac{1}{2}e^{x/2}\sin(ax)+(e^{x/2}-1)a\cos(ax)}.$$

Siden nevneren blir 0 når $x\to 0$, må vi velge $a=1/2$ slik at vi får et "0/0"-uttrykk igjen. Nok en anvendelse av l'Hopitals regel gir da

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}e^{x/2}-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}x\right)}{\frac{1}{2}e^{x/2}\sin\left(\frac{1}{2}x\right)+(e^{x/2}-1)\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}x\right)}\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}e^{x/2}+\frac{1}{4}\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}{\frac{1}{4}e^{x/2}\sin\left(\frac{1}{2}x\right)+\frac{1}{2}e^{x/2}\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}x\right)+\frac{1}{2}e^{x/2}\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}x\right)-(e^{x/2}-1)\frac{1}{4}\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

I utregningene over kunne vi egentlig bare sette likhetstegn når vi visste at grenseverdiene faktisk eksisterte.

6 Forholdstesten gir

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|(n+1)^3(2x-3)^{n+1}\right|}{\left|n^3(2x-3)^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3|2x-3|=|2x-3|<1.$$

Dvs., at $-1<2x-3<1$ eller $1<x<2$. Potensrekken konvergerer dermed for $x\in(1,2)$. Forholdstesten sier derimot ingenting om tilfellene $x=1$ og $x=2$, og disse må sjekkes separat.

$x=1$ gir

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^3.$$

Dette er en alternerende rekke hvor leddene ikke går mot null, dermed divergerer den.

$x=2$ gir

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^3(2x-3)^n=\sum_{n=1}^{\infty}n^3.$$

Dette er en rekke hvor leddene ikke går mot null, dermed divergerer denne også.

Den oppgitte potensrekken konvergerer derfor absolutt for $x\in(1,2)$, og divergerer ellers.

7 Vi deriverer $f(x)$:

$$f'(x) = e^{x^{-2}} \frac{d}{dx} x^{-2} = -2e^{x^{-2}} x^{-3}.$$

Uttrykket over viser at $f'(x) < 0$ for alle $x > 0$, og dermed er $f(x)$ strengt avtagende for alle $x > 0$. Altså må $f(x)$ ha en invers $f^{-1}(x)$ for $x > 0$.

Vi kan finne inversfunksjonen ved å løse følgende likhet for y:

$$x = e^{y^{-2}} - 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x + 1 = e^{y^{-2}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ln(x+1) = y^{-2} = \frac{1}{y^2}.$$

Dette gir at

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{\ln(1+x)}}.$$

Siden $f(x) > 0$ for $x > 0$, må vi velge den positive roten. Vi konkluderer derfor med at

$$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1}{\ln(1+x)}}, \qquad \text{for } x > 0.$$

8 Det er kjent at taylorrekken til e^u om $u = 0$ er gitt ved

$$e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}, \qquad \text{for alle } u \in (-\infty, \infty).$$

Vi kan derfor la $u = -t^2$ slik at

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}, \qquad \text{for alle } t \in (-\infty, \infty).$$

For å finne taylorrekken om $x = 0$ til $f(x)$ bruker vi at taylorrekken om $t = 0$ til e^{-t^2} konvergerer for alle $t \in [0, x]$, og at vi derfor kan integrere leddvis. Dette gir

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} x^{2n+1}.$$

Siden $f(x)$ er definert for alle $x \in (-\infty, \infty)$, vil også potensrekken konvergere for alle $x \in (-\infty, \infty)$.

9 Siden $4^n \geqslant 1$ og $c_n > 0$ for alle $n \geqslant 1$, vil $c_n \leqslant 4^n c_n$. Ved sammenligningstesten vil derfor $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergere.

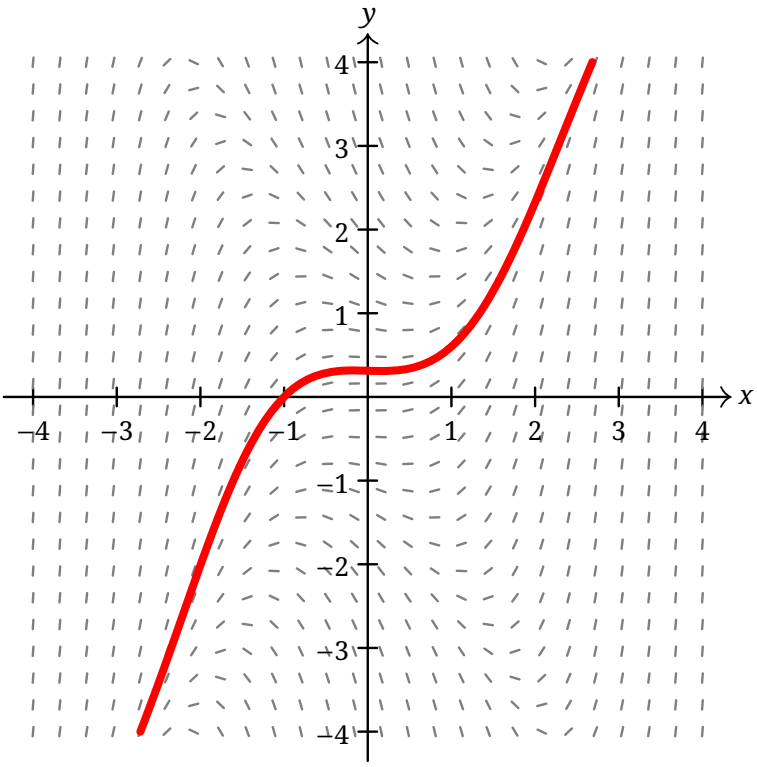
10 For $n \geqslant 0$, er Eulers metode er gitt ved

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)h, \qquad x_{n+1} = x_n + h,$$

hvor $y(x_n) \approx y_n$. Fra initialverdiproblemet og oppgaveteksten får vi at $f(x_n, y_n) = x_n^2 - 0.3y_n^2$, $h = 0.5$, $x_0 = -1$ og $y_0 = 0$. Videre er $x_1 = x_0 + h = -0.5$ og $x_2 = x_1 + h = 0$, vi er derfor ute etter y_2. Vi regner så ut de aktuelle verdiene:

$$y(-0.5) \approx y_1 = y_0 + (x_0^2 - 0.3y_0^2)h = 0 + ((-1)^2 - 0.3 \cdot 0^2) \cdot 0.5 = 0.5,$$
$$y(0) \approx y_2 = y_1 + (x_1^2 - 0.3y_1^2)h = 0.5 + ((-0.5)^2 - 0.3 \cdot 0.5^2)0.5 \approx 0.59.$$

Basert på retningsfeltene, får vi følgende skisse for $y(x)$:



Merk at Eulers metode gir litt for høye y-verdier.