NTNU
Institutt for matematiske fag

TMA4100 Matematikk 1
Løsningsforslag

07. august 2024

1 Definisjonen av den deriverte gir

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\frac{x-(x+h)}{x(x+h)} = -\lim_{h\to 0}\frac{1}{x(x+h)}$$
$$= -\frac{1}{x\lim_{h\to 0}(x+h)} = -\frac{1}{x^2}.$$

2 Ved innsetting får vi på venstre side

$$\tan\left((-\pi)\left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right),$$

og på høyre side

$$\frac{2(-\pi)\frac{1}{2}}{\pi} = -1.$$

Siden $\tan(-\pi/4) = -1$, ligger punktet på kurven.

For å finne tangenten, trenger vi stigningstallet i punktet $(-\pi, 1/2)$. Kurven er gitt implisitt, og vi deriverer derfor begge sider av likheten implisitt med hensyn på x:

$$\frac{d}{dx}\tan\left(xy^2\right) = \frac{d}{dx}\frac{2xy}{\pi},$$
$$\frac{1}{(\cos(xy^2))^2}\left(y^2 + x2y\frac{dy}{dx}\right) = \frac{2}{\pi}\left(y + x\frac{dy}{dx}\right).$$

Vi forenkler så regningen ved å sette inn $x = -\pi$ og $y = 1/2$:

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\left(\frac{1}{4} - \pi\frac{dy}{dx}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \pi\frac{dy}{dx}\right),$$
$$\frac{1}{2} - 2\pi\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\pi} - 2\frac{dy}{dx},$$
$$(2\pi - 2)\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} = \frac{\pi-2}{2\pi},$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x,y)=(-\pi,1/2)} = \frac{1}{4\pi}\frac{\pi-2}{\pi-1}.$$

Generelt er tangenten til en kurve $y = y(x)$ i punktet (x_0, y_0) gitt ved

$$y - y_0 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x,y)=(x_0,y_0)}(x - x_0).$$

Her får vi da

$$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi}\frac{\pi-2}{\pi-1}(x+\pi).$$

3 Ved å løse $x^2 + 6x + 9 = 0$, ser vi at

$$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2.$$

Videre er $x + 4 \geqslant x + 3$ for alle $x \in [-1, \infty)$. Dette gir

$$\int_{-1}^{R} \frac{x+4}{x^2+6x+9}\,dx = \int_{-1}^{R} \frac{x+4}{(x+3)^2}\,dx \geqslant \int_{-1}^{R} \frac{x+3}{(x+3)^2}\,dx = \int_{-1}^{R} \frac{1}{x+3}\,dx = \Big[\ln(x+3)\Big]_{x=-1}^{x=R}$$
$$= \ln(R+3) - \ln(2).$$

Siden $\ln(R+3) \to \infty$ når $R \to \infty$, divergerer integralet.

4 Generelt er buelengden L til grafen til en funksjon $f(x)$, for $x \in [a, b]$, gitt som

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Siden $f'(x) = 4x^3$, $a = 0$, $b = 1$ i vårt tilfelle, får vi

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + 16x^6}\,dx.$$

La $g(x) = \sqrt{1 + 16x^6}$. Fra formelarket kan vi approksimere L ved Simpsons metode på følgende måte:

$$L \approx \frac{h}{3}\big(g(x_0) + 4g(x_1) + 2g(x_2) + 4g(x_3) + g(x_4)\big),$$

hvor $h = \frac{1-0}{4}$ og $x_i = 0 + ih$ med $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Dette gir

$$L \approx \frac{1}{12}\left(\sqrt{1 + 16 \cdot 0^6} + 4\sqrt{1 + 16\left(\frac{1}{4}\right)^6} + 2\sqrt{1 + 16\left(\frac{1}{2}\right)^6} + 4\sqrt{1 + 16\left(\frac{3}{4}\right)^6} + \sqrt{1 + 16 \cdot 1^6}\right) \approx 1.60.$$

5 Fra likheten, ser vi at funksjonen $f(x)$ må tilfredsstille $f(0) = 1$. Ved analysens fundamentalteorem deriverer vi begge sider av likheten for å få

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} 1 - \frac{d}{dx} \int_0^x f(t)\,dt = -f(x).$$

Vi kan tolke dette som en separabel differensialligning med initialbetingelse $y(0) = 1$. Dette gir

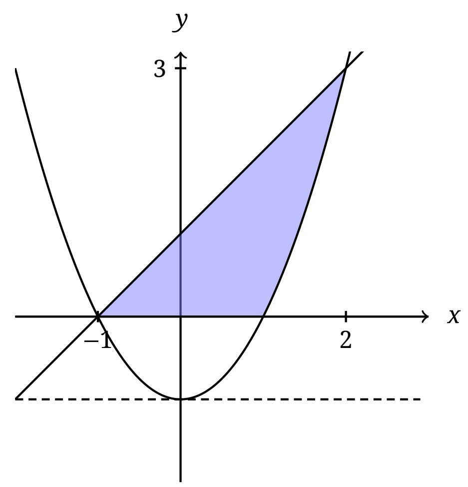
$$\frac{dy}{dx} = -y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{dy}{y} = -\,dx.$$

Ved å integrere begge sider får vi at

$$\ln(|y|) = -x + C \qquad \Longleftrightarrow \qquad |y| = Ce^{-x}.$$

$C = 1$ ved initialbetingelsen, og $y = |y| = e^{-x}$. Altså er $f(x) = e^{-x}$.

6 Området S er skissert under. Omdreiningslinjen vises også som en stiplet linje.



For å finne volumet av omdreiningslegemet som oppstår ved å dreie S om linjen $y = -1$, bruker vi sylinderskallmetoden. Siden vi skal rotere om $y = -1$, må vi invertere funksjonsuttrykkene. Da får vi at $y = x + 1$ blir $x = y - 1$ og $y = x^2 - 1$ blir $x = \sqrt{y+1}$. Dette gir

$$\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_0^3 (y+1)\left(\sqrt{y+1} - (y-1)\right) dy \\
&= 2\pi \int_0^3 (y+1)\sqrt{y+1}\, dy - 2\pi \int_0^3 (y+1)(y-1)\, dy \\
&= 2\pi \int_1^4 v^{\frac{3}{2}}\, dv - 2\pi \int_0^3 (y^2 - 1)\, dy \\
&= 2\pi \left(\left[\frac{2}{5} v^{\frac{5}{2}} \right]_{v=1}^{v=4} - \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{y=3} + \left[y \right]_{y=0}^{y=3} \right) \\
&= 2\pi \left(\frac{2}{5}\left(4^{\frac{5}{2}} - 1\right) - \frac{3^3}{3} + 3 \right) = 2\pi \left(\frac{2^6 - 2}{5} - 3^2 + 3 \right) = 2\pi \left(\frac{62}{5} - \frac{30}{5} \right) = \frac{64\pi}{5}.
\end{aligned}$$

$\boxed{7}$ (i) En konstant populasjon vil si $y(t) = y(0) = y_0$ for alle $t \geqslant 0$, altså at populasjonen ikke endrer seg. Vi må derfor velge $h(t)$ slik at

$$\frac{dy}{dt} = 0.$$

Altså velger vi

$$h(t) = r y(t) \left(1 - \frac{y(t)}{K}\right).$$

(ii) Fra forrige punkt ser vi at h egentlig er en funksjon av y_0 siden h er valgt slik at $y(t) = y_0$:

$$h(t) = r y(t) \left(1 - \frac{y(t)}{K}\right) = r y_0 \left(1 - \frac{y_0}{K}\right).$$

Vi skriver

$$h(x) = r x \left(1 - \frac{x}{K}\right).$$

Det eneste ekstremalpunktet er gitt ved

$$0 = h'(x) = r - \frac{2xr}{K} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \frac{K}{2},$$

og der har h et globalt maksimum siden $h''(x) < 0$.

En populasjonsstørrelse på $y(t) = y_0 = K/2 = 16/2 = 8$ (millioner tonn) gir at man kan høste maksimalt av den.

$\boxed{8}$ Forholdstesten gir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left| (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{n+1} \right| \Big/ \left| (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n} \right| = |x|^2 \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |x|^2 < 1,$$

altså at $|x| < 1$, eller $x \in (-1, 1)$.

Endepunktene $x = -1$ og $x = 1$ gir rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Dette er den alternerende harmoniske rekken som konvergerer betinget. Den oppgitte rekken konvergerer derfor for $x \in [-1, 1]$.

I følge formelarket har vi at

$$\ln(1+u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} u^n \qquad \text{for } u \in (-1, 1].$$

Ved å la $u = x^2$, ser vi at

$$\ln(1+x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{2n}.$$

Altså vil

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \ln\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \ln\left(\frac{5}{4}\right),$$

og dermed er $e^s = e^{\ln(5/4)} = 5/4$.

9 Vi skal vise at den oppgitte følgen er voksende. Vi bruker induksjon. For $n = 1$ har vi at

$$a_2 = \sqrt{\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} > 0 = a_1.$$

Anta nå at $a_{k+1} \geqslant a_k$, vi skal da vise at $a_{k+2} \geqslant a_{k+1}$:

$$a_{k+2} = \sqrt{\frac{1}{2}a_{k+1} + \frac{1}{2}} \geqslant \sqrt{\frac{1}{2}a_k + \frac{1}{2}} = a_{k+1},$$

hvor vi brukte at $f(x) = \sqrt{x}$ er en voksende funksjon. Ved induksjon er $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ voksende.

Det er videre oppgitt at følgen også er oppad begrenset. Følger som er voksende og oppad begrensede må konvergere (grenseverdien eksisterer) ved kompletthetsegenskapen til reelle tall. Vi kan da finne grenseverdien til følgen ved å bruke at

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = L,$$

slik at L må tilfredsstille

$$L = \sqrt{\frac{1}{2}L + \frac{1}{2}} \qquad \Longrightarrow \qquad 2L^2 - L - 1 = 0.$$

Dette gir at enten er $L = 1$ eller så er $L = -1/2$. Da må $L = 1$ siden følgen bare består av positive ledd.

10 Vi får oppgitt at $f(x)$ er kontinuerlig i $x = a$. Dette betyr at for ethvert tall $\varepsilon > 0$ finnes et tall $\delta > 0$ slik at

$$0 < |x-a| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Vi skal så vise at under denne antagelsen må $|f(x)|$ være kontinuerlig i $x = a$, altså må vi vise at for ethvert tall $\varepsilon > 0$ finnes et tall $\delta > 0$ slik at

$$0 < |x-a| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad ||f(x)| - |f(a)|| < \varepsilon.$$

La x tilfredsstille $0 < |x-a| < \delta$. Ved hjelp av den oppgitte ulikheten (med $z = f(x)$ og $y = f(a)$), får vi at

$$||f(x)| - |f(a)|| \leqslant |f(x) - f(a)|.$$

Per antagelse er så høyresiden av denne ulikheten mindre enn ε. Dermed har vi vist det vi skulle vise.