NTNU
Institutt for matematiske fag

TMA4100 Matematikk 1
Løsningsforslag

5. desember 2023

1 Den ensidige grensen fra høyre blir

$$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} x^2 = 2^2 = 4,$$

mens den ensidige grensen fra venstre blir

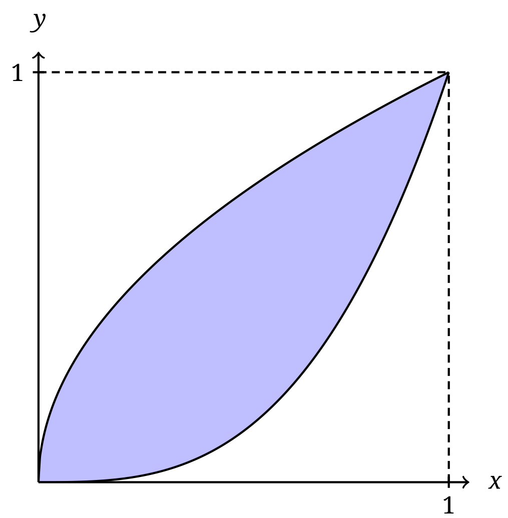
$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} x = 2.$$

Siden $\lim_{x \to 2+} f(x) \neq \lim_{x \to 2-} f(x)$ eksisterer ikke $\lim_{x \to 2} f(x)$.

Funksjonen $f(x)$ består av kontinuerlige funksjoner for $x \neq 2$, og i $x = 2$ er den ikke kontinuerlig siden $2 = f(2)$ umulig kan være likt $\lim_{x \to 2} f(x)$ som ikke eksisterer.

2 Området S som skal rotes om y-aksen er skissert i figuren under. Siden vi skal rotere om y-aksen kan vi bruke skivemetoden, men da må vi invertere funksjonsuttrykkene. Da får vi at $y = x^3$ blir $x = y^{1/3}$ og $y = \sqrt{x}$ blir $x = y^2$. Ved skivemetoden kan vi uttrykke volumet som

$$V = \pi \int_0^1 (y^{1/3})^2 \, dy - \pi \int_0^1 (y^2)^2 \, dy = \pi \left[\frac{3}{5} y^{5/3} \right]_{y=0}^{y=1} - \pi \left[\frac{1}{5} y^5 \right]_{y=0}^{y=1} = \pi \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{5} \right) = \frac{2\pi}{5}.$$



Alternativt: Ved synlinderskallmetoden blir uttrykket for volumet

$$V = 2\pi \int_0^1 x \left(\sqrt{x} - x^3 \right) dx.$$

3 Ved å la $u = \ln(x)$, altså $du/dx = 1/x$, får vi ved substitusjon at

$$\int \frac{\ln(\ln(x))}{x} \, dx = \int \ln(\ln(x)) \frac{dx}{x} = \int \ln(u) \, du.$$

Hintet gir oss da at vi bør bruke delvis integrasjon:

$$\int \ln(u) \, du = \int 1 \cdot \ln(u) \, du = u \ln(u) - \int u \frac{1}{u} \, du = u \ln(u) - u + C.$$

Vi konkluderer derfor med at

$$\int \frac{\ln(\ln(x))}{x}\,dx = \ln(x)\,(\ln(\ln(x)) - 1) + C.$$

4 For at $f(x)$ skal være kontinuerlig i $x = 0$ må

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = C.$$

Ved å bruke taylorrekken til $\sin(x)$ om $x = 0$ får vi

$$\begin{aligned}
C = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5} &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^5}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} - x + \frac{1}{6}x^3\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^5}\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + O(x^7) - x + \frac{1}{6}x^3\right) \\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{5!} + O(x^2)\right) = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}.
\end{aligned}$$

5 Definer

$$G(y) = \int_0^y \cos\left(\frac{1}{1+t^2}\right) dt$$

og $g(x) = 2x - x^2$ slik at $F(x) = G(g(x))$, og $g'(x) = 2 - 2x$. Ved å bruke kjerneregelen og analysens fundamentalteorem får vi at

$$\begin{aligned}
F'(x) = G'(g(x))g'(x) = g'(x)\left(\frac{d}{dy}\int_0^y \cos\left(\frac{1}{1+t^2}\right) dt\right)\Bigg|_{y=g(x)} &= (2-2x)\cos\left(\frac{1}{1+(g(x))^2}\right) \\
= 2(1-x)\cos\left(\frac{1}{1+(2x-x^2)^2}\right).
\end{aligned}$$

Vi sjekker kritiske punkter for å finne potensielle ekstremalpunkter. Det finnes nemlig ingen singulære punkter siden $F'(x)$ eksisterer for alle reelle x, ei heller endepunkter siden $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Kritiske punkter finner vi ved å løse $F'(x) = 0$. Vi ser umiddelbart at $x = 1$ er et kritisk punkt. La $f(t) = 1/(1+t^2)$. Denne funksjonen har et globalt maksimumspunkt i $t = 0$ og $f(0) = 1$. Det betyr at $0 < f(t) \leqslant 1$, og siden $\cos(x)$ er avtagende for $x \in (0,1)$ så får vi at $1 = \cos(0) > \cos(f(t)) \geqslant \cos(1) > 0$. Dermed er $x = 1$ det eneste kritiske punktet. Siden $g(x) \leqslant g(1) = 1$ og $\cos(f(t)) > 0$, vil $F(x) \leqslant F(1)$. Vi konkluderer da med at $x = 1$ gir et globalt maksimum.

6 Generelt er buelengden L til grafen til en funksjon $f(x)$, for $x \in [a,b]$, gitt som

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Vi deriverer derfor den oppgitte funksjonen $f(x)$:

$$\begin{aligned}
f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)\right) &= \frac{e^x+1}{e^x-1}\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right) = \frac{e^x+1}{e^x-1}\frac{(e^x+1)e^x - (e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2} \\
&= \frac{1}{e^x-1}\frac{2e^x}{e^x+1} = \frac{2e^x}{e^{2x}-1} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} = \frac{1}{\sinh(x)}.
\end{aligned}$$

Her brukte vi at $\frac{e^x-1}{e^x+1} > 0$ for $x \in [1,2]$, $(e^x)^2 = e^{2x}$ og $e^x e^{-x} = 1$.

Med $a = 1$ og $b = 2$ får vi da at

$$L = \int_1^2 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \int_1^2 \sqrt{\frac{(\sinh(x))^2+1}{(\sinh(x))^2}}\,dx = \int_1^2 \sqrt{\frac{(\cosh(x))^2}{(\sinh(x))^2}}\,dx.$$

Siden $\cosh(x)$ og $\sinh(x)$ begge er positive for $x \in [1,2]$, har vi vist det vi skulle vise:

$$L = \int_1^2 \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}\,dx.$$

Substitusjonen $u = \sinh(x)$ (med $du = \cosh(x)\,dx$) gir da at

$$\begin{aligned} L &= \int_{\sinh(1)}^{\sinh(2)} \frac{1}{u}\,du = \Big[\ln(u)\Big]_{u=\sinh(1)}^{u=\sinh(2)} = \ln(\sinh(2)) - \ln(\sinh(1)) = \ln\left(\frac{\sinh(2)}{\sinh(1)}\right) \\ &= \ln\left(\frac{e^2 - e^{-2}}{e^1 - e^{-1}}\right) = \ln(e^1 + e^{-1}) = \ln(2\cosh(1)). \end{aligned}$$

7 (i) Siden $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+11} = 1$, gir divergenstesten at den tilhørende rekken divergerer.

(ii) Siden

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\frac{e^n}{e^{n+1}}\right) = \frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{e} < 1,$$

gir forholdstesten at den tilhørende rekken konvergerer absolutt.

(iii) Vi begynner med å sjekke absolutt konvergens. Vi skal altså analysere rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + 2\sqrt{n}}.$$

For $n \geqslant 1$, er $\sqrt{n} \leqslant n$. Dermed er

$$\frac{1}{n+2\sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{n+2n} = \frac{1}{3}\frac{1}{n}.$$

Siden rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ er en p-rekke med $p = 1$, divergerer den ved integraltesten. Den oppgitte rekken kan derfor ikke konvergere absolutt.

Vi prøver testen for betinget konvergens: (i) Leddene er alternerende. (ii) Vi har at

$$\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)+2\sqrt{n+1}}\right| \leqslant \left|(-1)^n \frac{1}{n+2\sqrt{n}}\right|$$

siden $\sqrt{n+1} \geqslant \sqrt{n}$ for alle $n \geqslant 1$. (iii) $\lim_{n\to\infty}(-1)^n/(n+2\sqrt{n}) = 0$. Dermed konvergerer den oppgitte rekken betinget.

8 Fra formelarket har vi at taylorrekken til $\ln(1+t)$ om $t = 0$ er

$$\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n, \qquad -1 < t \leqslant 1.$$

La $f(t) = \ln(1+t)/t$. For $t \neq 0$ får vi da

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^{n-1} = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}t^2 + \cdots.$$

Siden

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1,$$

definerer vi $f(0) = 1$, slik at rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^{n-1}, \qquad -1 < t \leqslant 1.$$

konvergerer til $f(t)$ for alle $t \in (-1,1]$. Det er med andre ord den kontinuerlige utvidelsen av funksjonen $f(t)$ vi bruker videre i oppgaven.

Vi setter derfor inn taylorrekken vi har funnet:

$$F(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^{n-1}\,dt.$$

Siden rekken konvergerer for $t \in (-1,1)$, må $|x| < 1$ og vi kan dermed integrere rekken leddvis:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_0^x t^{n-1}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} x^n.$$

Taylorrekken til $F(x)$ kommer fra å integrere en konvergent rekke når $|x| < 1$. Da må taylorrekken også konvergere for $|x| < 1$. Det gjenstår å sjekke endepunktene $x = -1$ og $x = 1$. For $x = -1$, er

$$-F(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Dette er en p-rekke med $p = 2$ som vi vet konvergerer ved integraltesten. For $x = 1$, er

$$-F(1) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2},$$

og denne rekken konvergerer absolutt ved samme argumentasjon som over. Taylorrekken til $F(x)$ konvergerer altså for $x \in [-1,1]$.

9 Fra oppgaveteksten er

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-x}}{1+\cos(y)}.$$

Vi kjenner dette igjen som en separabel differensialligning med initialbetingelse $y(\ln(2)) = 0$:

$$(1+\cos(y))\,dy = e^{-x}\,dx, \qquad y(\ln(2)) = 0.$$

Vi integrerer begge sider og får

$$y + \sin(y) = -e^{-x} + C \qquad \Longleftrightarrow \qquad y + \sin(y) + e^{-x} = C.$$

Innsetting av initialbetingelsen gir

$$C = 0 + \sin(0) + e^{-\ln(2)} = \frac{1}{2}.$$

Ligningen for kurven er derfor

$$y + \sin(y) + e^{-x} = \frac{1}{2}.$$

10 For å få den første likheten har Erna gjort følgende mellomregning

$$\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}.$$

Dette kan begrunnes med regneregler for logaritmer ($\ln((x)^a) = a\ln(x)$) og at $n = 1/(1/n)$.

Den andre likheten følger av variabelbyttet $h = 1/n$ slik at $h \to 0$ når $n \to \infty$. I tillegg trekker hun fra $\ln(1) = 0$ i telleren.

For å få den tredje likheten har Erna brukt definisjonen av den deriverte med $f(t) = \ln(t)$ til å få

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1) = \left(\frac{d}{dt} f(t)\right)\bigg|_{t=1}.$$

Den fjerde likheten følger rett og slett ved at $f'(t) = (\ln(t))' = 1/t$ evaluert i $t = 1$ er lik 1.

For å ende opp med ligning (1), kan Sindre bruke at e^x er en kontinuerlig funksjon og at $x = e^{\ln(x)}$ for å få

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = e^{\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = e^1 = e.$$