NTNU
Institutt for matematiske fag

TMA4100 Matematikk 1
Løsningsforslag

Eksamen 11. desember 2018

1 I vårt tilfelle er

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x = 12x(x^2 + x - 2) = 12x(x-1)(x+2)$$

slik at $f'(x) = 0$ har løsning $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ og $x_3 = -2$. For å avgjøre hva slags ekstremalpunkter disse er ser vi på $f''(x)$. I vårt tilfelle er

$$f''(x) = 36x^2 + 24x - 24 = 12(3x^2 + 2x - 2)$$

slik at $f''(x_1) = -24 < 0$, $f''(x_2) = 36 > 0$ og $f''(x_3) = 72 > 0$. Altså er x_1 et lokalt maksimumspunkt mens x_2 og x_3 er lokale minimumspunkter.

Legg merke til at $f(x_2) = -3$ og $f(x_3) = -30$. Siden $f(x) \to \infty$ når $x \to \pm\infty$ har ikke $f(x)$ en største verdi, men $f(x)$ har en minste verdi når $x = x_3 = -2$. Altså er $f(x_3) = -30$ den minste verdien til $f(x)$.

2 La $u = x^2$ slik at $du = 2x\,dx$. Legg merke til at $u = 1$ når $x = 1$ og $u = 16$ når $x = 4$. Dermed er

$$\begin{aligned}\int_1^4 x \ln x^2\,dx &= \frac{1}{2}\int_1^{16} \ln u\,du \\ &= \frac{1}{2}\left[u \ln u - u\right]_1^{16} \\ &= \frac{1}{2}(16 \ln 16 - 15) = 32 \ln 2 - \frac{15}{2},\end{aligned}$$

der den andre likheten følger ved å benytte delvis integrasjon.

3 Fra

$$(x^2 + 1)y' - \frac{x}{y} = 0$$

får vi at

$$yy' = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

Altså er differensialligningen separabel. Løsning ved separasjon av variable gir

$$\frac{1}{2}y^2 = \int y\,dy = \int \frac{x}{x^2 + 1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2}C.$$

Det vil si

$$y^2 = \ln(x^2 + 1) + C.$$

Fra $y(0) = 2$ får vi at $C = 4$. Dermed er

$$y(x) = \pm\sqrt{\ln(x^2 + 1) + 4}.$$

Siden vi har betingelsen om at $y(0) = 2$ kan vi konkludere med at

$$y(x) = \sqrt{\ln(x^2 + 1) + 4}.$$

4 I vårt tilfelle er

$$\frac{dy}{dx} = x^{3/2}$$

slik at buelengden til grafen til $y = 2x^{5/2}/5$ for $x \in [0,2]$ er gitt ved

$$s = \int_0^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^2 \sqrt{1+x^3}\, dx.$$

La $f(x) = \sqrt{1+x^3}$. Simpsons metode med $2n = 4$ gir så tilnærmingen S_4 til s, der $h = (b-a)/2n = (2-0)/4 = 1/2$ og

$$\begin{aligned} S_4 &= \frac{h}{3}\left(f(0) + 4f(h) + 2f(2h) + 4f(3h) + f(2)\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f(2) + 4f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2)\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(1 + 4\sqrt{1+\frac{1}{8}} + 2\sqrt{2} + 4\sqrt{1+\frac{27}{8}} + 3\right) \approx 3.2396. \end{aligned}$$

$\boxed{5}$ **i)** For å vise at f er kontinuerlig i $x = 0$ må vi vise at

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0.$$

Legg merke til at $\cos x - 1 \to 0$ når $x \to 0$, og at $\sin x \to 0$ når $x \to 0$. L'Hôpitals regel gir så at

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} -\frac{\sin x}{\cos x} = 0 = f(0).$$

Altså er f kontinuerlig i $x = 0$.

ii) Fra definisjonen av den deriverte har vi at

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x \sin x} \\ &= \lim_{x\to 0} -\frac{\sin x}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0} -\frac{\cos x}{2\cos x - x \sin x} = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

der vi har brukt l'Hôpitals regel to ganger. Altså er f deriverbar i $x = 0$.

$\boxed{6}$ **i)** Legg merke til at

$$0 < \frac{x}{\sqrt{x^5} + 3} < \frac{x}{\sqrt{x^5}} = \frac{1}{x^{3/2}}$$

når $x \in [1, \infty)$, og at

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^{3/2}}\, dx = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{b}}\right) = 2 < \infty.$$

Altså konvergerer integralet

$$\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{x^5} + 3}\, dx.$$

ii) Legg merke til at $0 < \sin x \leq 1$ når $x \in (0, \pi/2]$, slik at

$$0 < \frac{\sin x}{x^{1/3}} \leq \frac{1}{x^{1/3}}$$

for $x \in (0, \pi/2]$. Siden

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{x^{1/3}}\, dx = \lim_{a\to 0+} \int_a^{\pi/2} \frac{1}{x^{3/2}}\, dx = \lim_{a\to 0+} \left[\frac{3}{2}x^{2/3}\right]_a^{\pi/2} = \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2/3} < \infty$$

konvergerer integralet

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^{1/3}}\, dx.$$

$\boxed{7}$ **i)** Vi observerer at

$$0 < \frac{9^n}{8^n + 10^n} < \frac{9^n}{10^n} = \left(\frac{9}{10}\right)^n$$

for alle $n \geq 0$.
Siden

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n$$

konvergerer $(0 < 9/10 < 1)$ så gir sammenligningstesten at

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9^n}{8^n + 10^n}$$

også konvergerer.

ii) Siden

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}(1-2x)^n\right|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/n}}|1-2x| = |1-2x|$$

gir rottesten at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(1-2x)^n$$

konvergerer for $|1-2x| < 1$. Siden

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}(1-2x)^n\right| = \infty$$

for $|1-2x| > 1$, så divergerer rekken for $|1-2x| > 1$ da leddene ikke går mot 0 når $n \to \infty$.
Vi må også sjekke for konvergens i endepunktene, $x = 0$ og $x = 1$. For $x = 0$ så er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(1-2x)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

som vi vet konvergerer ved for eksempel alternerende rekketest. For $x = 1$ så er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(1-2x)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

det vil si, den harmoniske rekken $(p = 1)$, som vi vet at divergerer.
Altså konvergerer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(1-2x)^n$$

for $x \in [0, 1)$.

$\boxed{8}$ I vårt tilfelle er $|f^m(x)| \leq 1$ for alle $x \in [-1, 1]$ for alle heltall $m \geq 0$. Siden $|(x-a)^m| = |x^m| \leq 1$ for alle $x \in [-1, 1]$ og alle heltall $m \geq 0$, gir Taylors teorem at

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{|f^{n+1}(s)|}{(n+1)!}|(x-a)^{n+1}| \leq \frac{1}{(n+1)!}.$$

Fra $(n+1)! = 120$ får vi at $n = 4$. Dermed vet vi at

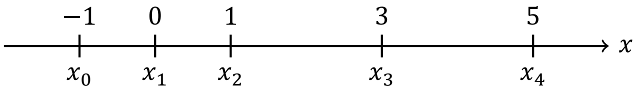
$$P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

gir at

$$|f(x) - P_4(x)| \leq \frac{1}{120}$$

når $x \in [-1, 1]$.

$\boxed{9}$ Vi velger som partisjon av $[-1, 5]$, partisjonen $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$ hvor $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ og $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$ og $x_4 = 5$.



Siden g er voksende vet vi at

$$g(x_i) \leq g(x) \leq g(x_{i+1})$$

for $x \in [x_i, x_{i+1}]$, som igjen gir at

$$g(x_i) + 1 \leq g(x) + 1 \leq g(x_{i+1}) + 1$$

for $x \in [x_i, x_{i+1}]$.
La $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Dermed er den nedre og øvre riemannsummen til f for $\mathcal{P}$ gitt ved henholdsvis

$$L(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{3} (g(x_i) + 1)\,\Delta x_i = (-1 + 1) \cdot 1 + (1 + 1) \cdot 1 + (4 + 1) \cdot 2 + (5 + 1) \cdot 2 = 24$$

og

$$U(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{3} (g(x_{i+1}) + 1)\,\Delta x_i = (1 + 1) \cdot 1 + (4 + 1) \cdot 1 + (5 + 1) \cdot 2 + (6 + 1) \cdot 2 = 33.$$

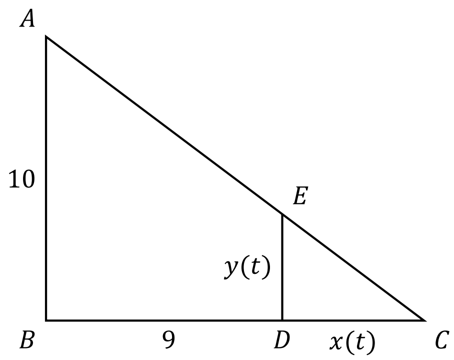
Altså er

$$24 = L(f, \mathcal{P}) \leq \int_{-1}^{5} (g(x) + 1)\,dx \leq U(f, \mathcal{P}) = 33,$$

der $U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) = 9 < 10$.

$\boxed{10}$ **i)** La $y(t)$ være høyden til mannen (over bakken) og $x(t)$ være lengden til skyggen av mannen. Trekantene ABC og EDC er formlike slik at

$$\frac{10}{y(t)} = \frac{9 + x(t)}{x(t)}.$$



Innsatt for $y = 2$ gir det at

$$\frac{10}{2} = 5 = \frac{9 + x}{x}$$

som gir at $5x = 9 + x$, det vil si, $x = 9/4 = 2.25$ m.

ii) Implisitt derivasjon med hensyn på t anvendt på

$$10x(t) = y(t)(9 + x(t))$$

gir at

$$10\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}(9 + x(t)) + y(t)\frac{dx}{dt}$$

som innsatt for $x(t) = 2.25$, $y(t) = 2$ og $dy/\,dt = -0.7$ gir at

$$10\frac{dx}{dt} = -0.7(9 + 2.25) + 2\frac{dx}{dt},$$

det vil si

$$\frac{dx}{dt} \approx -0.98 \text{ m/s}.$$