

Oppgave 1 Løs initialverdi problemet

$$y' - (2/x)y = x^2, \quad y(1) = 2.$$

Oppgave 2 Beregn det ubestemte integralet

$$\int \frac{dx}{x^3 + x}.$$

Oppgave 3 Vi skal løse ligningen $x^2 - 2 \cos x = 0$.

- a) Vis at ligningen har nøyaktig én løsning på intervallet $[0, 2]$. Har ligningen noen løsning utenfor dette intervallet?
- b) Bruk Newtons metode til å finne løsningen på intervallet $[0, 2]$ med tre desimalers nøyaktighet.

Oppgave 4 Finn punktene der funksjonen $f(x) = |x - 1| - (x - 2)^2$ oppnår henholdsvis sitt maksimum og sitt minimum på intervallet $[0, 4]$.

Oppgave 5 Gitt funksjonen

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{2 \cos^2 t - 1} dt, \quad x \in [-\pi/4, \pi/4].$$

Bestem buelengden til grafen til f .

Oppgave 6 Uttrykk funksjonen

$$\frac{e^{-x^2} - 1}{x^2}$$

som en Maclaurinrekke, og bruk denne rekken til å uttrykke det bestemte integralet

$$\int_0^1 \frac{e^{-x^2} - 1}{x^2} dx$$

som en alternerende rekke. Hvor mange ledd må du summere for at partialsummen av denne rekken skal approksimere integralet med en feil mindre enn 10^{-2} ? (Vink: Det kan antas kjent at

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$$

holder for alle reelle tall t .)

Oppgave 7 Sindre skal steke ribbe til julaften og følger en oppskrift han har funnet på Internett. Vi kan anta at temperaturen på kjøkkenet er 21 grader. I tillegg antar vi at Newtons avkjølingslov gjelder slik at temperaturen i ribba endres med en rate som er proporsjonal med temperaturdifferansen mellom omgivelsene (kjøkken eller ovn) og ribba. Vi antar dessuten at temperaturen i Sindres ovn endrer seg momentant til ønsket temperatur når Sindre skrur på bryteren.

- a) Sindre tar ribba ut av kjøleskapet en time før han skal steke den. Han stikker umiddelbart steketermometeret i ribba og leser av at temperaturen er 4 grader. Idet han setter ribba inn i ovnen, leser han av at temperaturen er 7 grader. Han lar så ribba steke i 30 minutter på 230 grader. Hva viser steketermometeret da?
- b) I følge oppskriften skal Sindre nå skru temperaturen ned til 160 grader og ta ut ribba når termometeret viser 75 grader. Imidlertid har han nå ikke mer enn to timer til rådighet. Hva må han i stedet endre temperaturen til om julemiddagen skal bli ferdig i tide?

Oppgave 8 La $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ være en følge. Vi antar at det finnes en $r > 0$ slik at følgen $\{a_n r^n\}_{n=0}^{\infty}$ er begrenset. Vis at da er potensrekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

absolutt konvergent når $|x| < r$.