**Oppgave 1** Regn ut

$$\int \frac{x^2}{(x-1)(x^2+x+1)}\,dx.$$

**Oppgave 2** Anta at vi bare kjenner funksjonen $f(x)$ for visse punkter $x$ som angitt i tabellen under.

| $x$ | 0.00 | 0.25 | 0.50 | 0.75 | 1.00 | 1.25 | 1.50 | 1.75 | 2.00 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1.00 | 0.94 | 0.78 | 0.57 | 0.37 | 0.24 | 0.11 | 0.05 | 0.02 |

Finn en tilnærming av

$$\int_0^2 f(x)\,dx$$

ved å bruke trapesmetoden med $n = 4$ delintervaller.

**Oppgave 3** Regn ut

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\ln(1+x^2)}.$$

**Oppgave 4** La

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{\cos(t)}\,dt$$

for $x \in [0, \pi/2]$.

Forklar hvorfor buelengden til kurven gitt som grafen til $y = f(x)$ for $x \in [0, \pi/2]$ er

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos(x)}\,dx.$$

Finn så $L$ ved å regne ut dette integralet.

(Vink: $1 + \cos(2y) = 2\cos^2(y)$.)

**Oppgave 5** Vis at forholdstesten *ikke* kan avgjøre hvorvidt rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left(\frac{n}{100}\right)}{n^{2023}}$$

konvergerer absolutt.

Hvorfor har det ikke noe å si for konvergensen til rekken at

$$\frac{\ln\left(\frac{n}{100}\right)}{n^{2023}} < 0$$

for $n = 1, 2, \ldots, 99$?

Bruk så en annen test for å avgjøre om rekken gitt over konvergerer eller divergerer. Det oppgis som kjent at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{n}{100}\right)}{n^q} = 0$$

for enhver $q > 0$.

(Vink: Prøv grensesammenligningstesten.)

**Oppgave 6** Bestem $b > 0$ slik at

$$\int_0^b (x - x^2)\,dx$$

blir størst mulig.

**Oppgave 7** Løs initialverdiproblemet

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = \frac{e^{x^2}}{(x+1)^2}, \qquad y(0) = 5,$$

der $x > -1$.

**Oppgave 8** Følgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er gitt rekursivt som

$$a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n}, \qquad \text{der } a_1 = 1.$$

Vis at følgen er avtagende.

Det oppgis som kjent at følgen er nedad begrenset av 0.

Forklar hvorfor følgen konvergerer og regn ut $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

**Oppgave 9** La

$$f(x) = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geqslant 0, \\ \sqrt{-x} & x < 0. \end{cases}$$

Lag en skisse av grafen til $f(x)$.

Ligningen $f(x) = 0$ har nøyaktig én løsning: $x = 0$ (du trenger ikke vise dette).

Forklar hvorfor Newtons metode ikke vil kunne hjelpe oss med å finne dette nullpunktet for $f(x)$.

**Oppgave 10** Vis at ligningen

$$e^{-x^2} = x^2$$

har nøyaktig én løsning $r$ i intervallet $[0, 1]$.

Finn så en tilnærmet verdi, $t$, for $r$ ved å bruke taylorpolynomet $P_4(x)$ til $f(x) = e^{-x^2}$ av grad 4 om $x = 0$.