Oppgåve 1 Rekn ut

$$\int \frac{x^2}{(x+1)(x-1)(x-2)}\,dx.$$

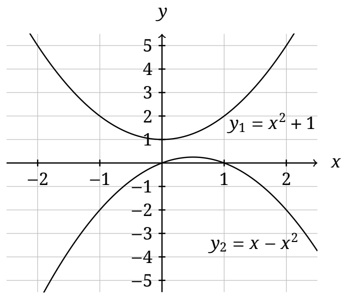
Oppgåve 2

Finn den minste vertikale avstanden mellom dei to parablane

$$y_1 = x^2 + 1$$

og

$$y_2 = x - x^2.$$



Oppgåve 3 Likninga

$$\frac{x}{x^2+1} = \sqrt{1-x}$$

har nøyaktig ei løysing for $x \in [0,1]$ (du treng ikkje vise dette).

Bruk Newtons metode med $x_0 = 0.8$ til å finne ei tilnærming til løysinga med to desimalars nøyaktigheit.

Oppgåve 4 La R vere området i xy-planet som er avgrensa av funksjonane

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

og

$$g(x) = 2 - x^2.$$

Lag ei skisse av området R og rekn ut volumet av omdreiingslekamen som oppstår når vi dreier R om linja $x = 1$.

Oppgåve 5 Rekn ut

$$\int_1^R \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

der $R > 1$.

Bestem ein verdi av a slik at integralet

$$\int_1^\infty \left(\frac{ax}{x^2+1} - \frac{1}{2x}\right) dx$$

konvergerer. Rekn så ut integralet for denne verdien av a.

$\Big($Vink: Du kan få bruk for at $\lim\limits_{R\to\infty} \ln\left(\frac{\sqrt{R^2+1}}{R}\right) = 0.\Big)$

Oppgåve 6 Det har brote ut ein ulækjeleg sjukdom i ein avsidesliggande by med totalt 5000 innbyggarar. Endringsraten for talet på smitta innbyggarar i byen er proporsjonal (med proporsjonalitetskonstant a) med produktet av dei som er smitta og dei som ikkje er smitta.

La $S(t)$ vere talet på innbyggarar i byen som er smitta ved tid t dagar etter at smitta braut ut.

Forklar kvifor

$$\frac{dS}{dt} = aS(5000 - S).$$

Ved utbrotet av sjukdommen er det 250 innbyggarar som har fått påvist smitte. Etter 7 dagar er det 1250 innbyggarar som har fått påvist smitte. Kor mange dagar vil det ta før 80 % av innbyggarane i byen er smitta?

Oppgåve 7 Avgjer om rekkene

$$(i) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos^2(n)}{n^{2022}} \qquad\qquad (ii) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2 - 3n^3}{4n^3 + 1}$$

er absolutt konvergente, vilkårsbundne konvergente eller divergente.

Oppgåve 8 La $r > 0$. Finn taylorpolynomet til

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^r}$$

av grad 1, $P_1(x)$, om punktet $x = 0$, og bruk dette til å vise at

$$\frac{1}{(1+x)^r} > 1 - rx$$

for $x > 0$.

Oppgåve 9 Anta at

$$f(x) = xg(x)$$

der $g(x)$ er ein funksjon som er kontinuerleg i $x = 0$ og kvar $g(0) = 2\pi$.

Vis at $f(x)$ er deriverbar i $x = 0$, og rekn ut $f'(0)$.

Oppgåve 10

La

$$g(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

Rekn ut $g(4)$ og $g'(4)$ når du veit at grafen til $f(x)$ er som vist på figuren til høgre.