Dette er ein kombinasjon av oppgåvene som ble gitt til eksamen.

Oppgåve 1 Kva for ein eller fleire av følgjande påstandar er **riktig**? Vel eitt eller fleire alternativ.

- ☐ Vi kan bruke forholdstesten til å vise konvergens av rekka
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$
- ☐ Dersom
$$f(x) = \int_1^{x^2} \cos(t^2)\, dt$$
så er
$$f'(x) = 2x\cos(x^4) - \cos(1).$$
- ☐ Differensiallikninga
$$(x^2+1)\frac{dy}{dx} + 3x(y-1) = 0$$
er både separabel og lineær.
- ☐ Dersom $f'(x) = g'(x)$ for alle x i eit intervall (a, b), så er
$$f(x) - g(x) = c$$
for alle $x \in (a, b)$, der c er ein konstant.

Oppgåve 2 I denne oppgåva skal du kople riktig bestemt integral (kolonnar) med riktig riemannsum (rader). Finn dei som passar saman.

	$\int_0^1 \frac{2}{1+x^2}\,dx$	$\int_0^1 \sin(1+x)\,dx$	$\int_{-1}^0 \sin(1+x)\,dx$	$\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx$
$2\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2+i^2}$	○	○	○	○
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{n+i}{n}\right)$	○	○	○	○
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{i}{n}\right)$	○	○	○	○
$2n\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2+i^2}$	○	○	○	○

Oppgåve 3 Finn

$$\lim_{x\to 4} f(x)$$

når vi får opplyst at

$$\lim_{x\to 4} \frac{f(x)-5}{x-2} = 3.$$

Oppgåve 4 I ein by med konstant befolkning på 10 000 har eit reklamebyrå fått i oppgåve å lage ein reklamekampanje for eit nytt produkt. Kampanjen syrgjer for at endringsraten (med hensyn på t) til individa x i befolkninga som har høyrt om produktet ved tida t (der t måles i dagar) er lik halvparten av individa i befolkninga som så langt ikkje har høyrt om produktet.

Kor lang tid tek det før 95 % av befolkningen har høyrt om produktet dersom vi antek at $x(0) = 100$?

Oppgåve 5 Vis at likninga

$$|x-1| - x^2 + 2 = 0$$

har nøyaktig éi løysing for $x \geqslant 0$.

Oppgåve 6 Er funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

deriverbar i $x = 0$? Svaret må grunngjevast.

Oppgåve 7 Den sokalla sinusintegralfunksjonen,

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \qquad f(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(t)}{t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0, \end{cases}$$

er ofte i bruke i ulike samanhengar. Det finst ingen elementær antiderivert for

$$\frac{\sin(t)}{t}$$

slik at vi er nødt å ty til numerisk integrasjon for å finne tilnærma verdiar for $\mathrm{Si}(x)$.

Finn ein tilnærma verdi for

$$\mathrm{Si}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

ved å bruke Simpsons metode med $2n = 4$. Kor stor må n vere for at feilen med denne tilnærminga er garantert mindre enn 10^{-6}? Du kan bruke utan bevis at

$$|f^{(4)}(t)| \leqslant 1$$

for $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$ og at $f^{(4)}(t)$ er kontinuerleg på $[0, \pi/2]$.

Oppgåve 8 Vis at potensrekka

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2+1} x^n$$

har konvergensradius $R = 1$. Avgjer om potensrekka er konvergent for $x = \pm 1$.

Oppgåve 9 Bruk Newtons metode til å bestemme koordinatane (x, y) som ligg på kurva

$$y = (x+2)^3$$

som ligg nærmast $(0, 15)$. Angje svaret ditt med fire desimalers nøyaktigheit.

(Vink: Du kan bruke utan bevis at $2x + 6((x+2)^3 - 15)(x+2)^2 = 0$ har nøyaktig éi løysing.)

Oppgåve 10 Marie har fått i oppgåve å rekne ut volumet av ein omdreiingslekam som kjem fram ved å dreie området i xy-planet avgrensa av kurvene

$$x = 4y^2 \qquad \text{og} \qquad x = y^2 + 3$$

om linja

$$y = -3.$$

Marie skriv i løysinga si:

«Volumet av omdreiingslekamen er gitt ved

$$\begin{aligned} V = \pi \int_0^3 & \left(\left(\frac{\sqrt{x}}{2} + 3 \right)^2 - \left(-\frac{\sqrt{x}}{2} + 3 \right)^2 \right) dx \\ & + \pi \int_3^4 \left(\left(\frac{\sqrt{x}}{2} + 3 \right)^2 - \left(\sqrt{x-3} + 3 \right)^2 \right) dx \\ & + \pi \int_3^4 \left((-\sqrt{x-3} + 3)^2 - \left(-\frac{\sqrt{x}}{2} + 3 \right)^2 \right) dx \end{aligned}$$

der vi har brukt skivemetoden.»

Marie innser at volumet lar seg berekne vesentleg enklare ved hjelp av sylinderskalmetoden.

Lag ei skisse som viser området i xy-planet og rekn ut volumet av omdreiingslekamen ved hjelp av sylinderskalmetoden.