

*Dette er en kombinasjon av oppgavene som ble gitt til eksamen.*

**Oppgave 1** Finn ligningen til tangenten til kurven

$$y^3 - 2xy = 4e^{2x-y}$$

i punktet  $(1, 2)$ . Vis utregningen.

**Oppgave 2** Finn løsningen på initialverdiproblemet

$$y' + 3xy = 2x, \quad y(0) = 0.$$

Vis utregningen.

**Oppgave 3** La funksjonen  $f(x)$  være definert på intervallet  $[-\pi/2, \pi/2]$  slik:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Begrunn at  $f$  er kontinuert i  $x = 0$ . Bruk definisjonen av den deriverte til å vise at  $f$  også er deriverbar i  $x = 0$ , og bestem  $f'(0)$ .

**Oppgave 4** La  $R$  være området i  $xy$ -planet avgrenset av kurvene

$$x = y^2, \quad x = y, \quad x = 1 \quad \text{og} \quad x = 3.$$

Finn volumet av rotasjonslegemet som framkommer når  $R$  roteres om linja  $x = -1$ .  
Vis utregningen.

**Oppgave 5**

Regn ut det ubestemte integralet

$$\int \frac{dx}{3 + e^x}.$$

Begrunn at det uegentlige integralet

$$\int_0^\infty \frac{dx}{3 + e^x}$$

konvergerer, og finn verdien.

Vis utregningene.

**Oppgave 6** For hver av rekkene (i), (ii) og (iii), avgjør om den er absolutt konvergent, betinget konvergent eller divergent.

(i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1) \ln(n+1)}$

(ii)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{(n-1)!}$

(iii)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(n)$

Begrunn svaret.

**Oppgave 7** Et svømmebasseng er 30m (m=meter) langt, 15m bredt, 1m dypt i den grunne enden og 6m dypt i den dype enden. Bunnen skrår jamnt. La  $h$  betegne vanddybden i den dype enden av bassenget ( $0 \leq h \leq 6$ ).

Finn et uttrykk  $V(h)$  for volumet av vannet i bassenget som funksjon av  $h$ .

Bassenget tømmes gjennom et hull i bunnen av den dype enden med konstant rate  $1 \text{ m}^3/\text{minutt}$ . Hvor fort synker vannet (meter per minutt) i bassenget ved det tidspunktet vanddybden i den dype enden er 3m?

**Oppgave 8** Begrunn hvorfor funksjonen  $f(x) = 2 \sin x - x$  har nøyaktig ett nullpunkt i intervallet  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ .

Sett  $x_0 = 2$  og gjør én iterasjon med Newtons metode for å finne en tilnæringsverdi  $x_1$  til dette nullpunktet.

**Oppgave 9** Bestem grenseverdien

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin^2 x}{x - \arctan x}.$$

Vis utregningen. (Du kan få bruk for  $\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^5)$ .)

**Oppgave 10**

Finn alle lokale ekstremalpunkter til funksjonen definert ved

$$f(x) = \frac{e^{2x^2-1}}{x}, \quad x \neq 0.$$

For hvilke verdier av  $k \in \mathbb{R}$  har ligningen

$$e^{2x^2-1} = kx$$

ingen løsninger, én løsning eller to løsninger?

Svaret skal begrunnes.