

Oppgave 1 Bruk en passende substitusjon til å beregne det ubestemte integralet

$$\int e^x \sqrt{1 + e^x} dx.$$

Oppgave 2 Beregn grenseverdien

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\int_{\pi/2}^x \sqrt{2 - \cos u} du}{\cos x}.$$

Oppgave 3 Finn ligningen til tangenten til kurven

$$x(y + 1) + e^y = 2$$

i punktet $(1, 0)$.

Oppgave 4 Beregn det ubestemte integralet

$$\int \frac{dx}{x^3 + 2x^2 + 2x}.$$

Oppgave 5 Løs initialverdi problemet

$$\frac{dy}{dx} + x^2 y = x^2, \quad y(0) = 2.$$

Oppgave 6 La f være en to ganger deriverbar funksjon med $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$ og $f''(0) = 1$. Finn Taylor-polynomet av grad 2 til funksjonen $g(x) = f(f(x))$ om punktet $x = 0$.

Oppgave 7 Siv har en kuleformet vanntank med radius R . På toppen av tanken er det et lite hull. Siv ønsker å finne ut hvor mye vann det er igjen i vanntanken ved å måle avstanden L fra hullet ned til vannoverflaten.

Finn et eksplisitt uttrykk for vannvolumet $V(L)$ for $0 \leq L \leq 2R$.

Oppgave 8 I en innsjø er det en fiskebestand som på grunn av en giftlekkasje har sluttet å formere seg ved tidspunktet $t = 0$. Målinger viser at endringen i fiskebestanden per tidsenhet er proporsjonal med 1 delt på kvadratroten av fiskebestanden.

Det var 2500 fisk i innsjøen da giftlekkasjen inntraff. En måling etter 122 dager viste at det da var 1600 levende fisk i innsjøen. Hvor lang tid vil det ta før all fisk er død?

Oppgave 9 En følge er definert rekursivt på følgende måte:

$$x_0 = 2, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 3}{2x_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Finn en funksjon f slik at følgen $\{x_n\}$ fremkommer ved bruk av Newtons metode for løsning av $f(x) = 0$. Vis deretter at følgen $\{x_n\}$ konvergerer. Hvilket tall konvergerer følgen mot?

Oppgave 10 Gi et eksempel på to konvergente rekker $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ slik at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ divergerer. Vis at det ikke er mulig å gi et slikt eksempel dersom vi i tillegg krever at en av rekkene $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eller $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ skal konvergere absolutt.