



Faglig kontakt under eksamen:

Sigmund Selberg tlf. 400 43 660

Halvard Fausk tlf. 924 46 311

Helge Maakestad tlf. 900 15 294

EKSAMEN I TMA4100 MATEMATIKK 1

Bokmål

Fredag 15. desember 2006

kl. 9–13

Hjelpemidler (kode C): Typegodkjent kalkulator med tomt minne (HP 30S)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 15. januar 2007

Alle svar skal begrunnes og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1 Bestem følgende grenseverdier:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^{1/x^2}.$$

Oppgave 2 Løs integralet

$$\int \frac{x - 2}{x^2 + x} dx.$$

Oppgave 3 Avgjør om rekkene konvergerer eller divergerer:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}.$$

Oppgave 4 La R være området avgrenset av x -aksen og kurven $y = 4 - x^2$, $-2 \leq x \leq 2$. La videre T betegne omdreiningslegemet som fremkommer ved å rotere R om y -aksen. Vi borer ut en sylinder av T , med radius lik 1 og med y -aksen som senterakse. Finn volumet av den gjenværende delen av T .

Oppgave 5 Finn Taylorrekken om $x = 0$ for funksjonen

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin(t^2)}{t^2} dt,$$

og bruk denne rekken til å beregne

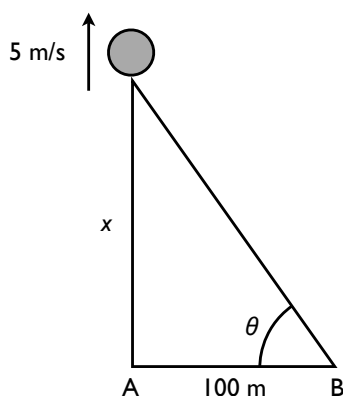
$$\int_0^1 \frac{\sin(t^2)}{t^2} dt$$

med et avvik mindre enn 10^{-6} i absoluttverdi.

Du kan bruke uten bevis at

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots .$$

Oppgave 6 En værballong slippes fra punkt A og stiger vertikalt med hastighet 5 m/s. Vi måler elevasjonsvinkelen θ sett fra et annet punkt B som ligger 100 m unna punkt A , som vist på figuren under. Bestem hvor fort vinkelen θ øker i det øyeblikk ballongen er 200 m over A . Gi svaret i radianer pr. sekund.



Oppgave 7 En pasient får tilført et legemiddel ved intravenøs innsprøytning med en konstant rate. Vi antar at legemiddelet brytes ned med en rate proporsjonal med dets konsentrasjonen i blodet. Konsentrasjonen $x(t)$ av legemiddelet i blodet tilfredsstiller da differensialligningen

$$\frac{dx}{dt} = a - bx,$$

der a og b er positive konstanter. Vi måler x i milligram pr. liter (mg/l) og tiden t i timer.

- Løs differensialligningen, og finn $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$, uttrykt ved a og b .
- Anta at konsentrasjonen er lik null kl. 13.00, at den har steget til 10 mg/l kl. 14.00 og videre til 15 mg/l kl. 15.00. Ved hvilket klokkeslett når konsentrasjonen 19 mg/l? (Gi svaret som et klokkeslett i timer og minutter.)