



Faglig kontakt under eksamen:

Harald Hanche-Olsen 7359 3525
Lisa Lorentzen 7359 3548
Johan Aarnes 7359 1744

Bokmål

EKSAMEN I FAG SIF5003 MATEMATIKK 1

Onsdag 5. desember 2001

Tid: 09:00–14:00

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP30S), med tilhørende bruksanvisning.
Rottmann: *Matematisk Formelsamling*.

Sensuren faller 16. januar.

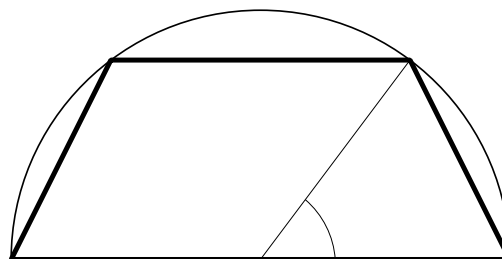
Alle svar skal begrunnes, og det må være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1 Beregn følgende grenser:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln \sin x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right).$$

Oppgave 2 Finn trapeset med størst areal som kan innskrives i en halvsirkel med radius 1. (Et trapes er en firkant med to parallelle sider.)

Hint: Det kan være lurt å uttrykke arealet ved vinkelen antydnet i figuren.



Oppgave 3 Beregn buelengden av kurven $y = f(x)$, der f er gitt ved

$$f(x) = \int_1^x \sqrt{t^2 e^{2t^2} - 1} dt, \quad 1 \leq x \leq 2.$$

Oppgave 4

- a) Vis at den første av rekkene under er divergent. Er den andre rekken divergent, betinget konvergent, eller absolutt konvergent?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n + \sqrt{n})\sqrt{\ln n}}.$$

- b) Potensrekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n}$$

er gitt. Vis at rekken konvergerer for alle x , og finn rekkens sum når $x = 1$.

Oppgave 5 Personer med for lavt stoffskifte må tilføres en daglig dose av legemidlet *thyroxin*. Dette stoffet har en biologisk halveringstid på ca. 7 døgn, det vil si etter denne tiden er bare halvparten av en tilført stoffmengde tilbake i organismen. La $M(t)$ være mengden av thyroxin (målt i mg) i kroppen ved tiden t (målt i døgn). Vi antar at $M(t)$ er gitt ved

$$M(t) = M(0)e^{-kt}$$

der k er en positiv konstant.

- a) Bruk de gitte opplysningene til å vise at $k \approx 0,1$. Regn med verdien $k = 0,1$ i resten av oppgaven.

Anta at en person tilføres én daglig dose thyroxin på 0,1 mg. Vis at på n -te dag er thyroxin-mengden i kroppen (umiddelbart etter dagens dose) gitt ved

$$M_n = 0,1 \cdot \frac{1 - e^{-0,1 \cdot n}}{1 - e^{-0,1}}.$$

(Hint: Det kan lønne seg å bruke induksjon.)

- b) Vis at medisinnmengden M_n i kroppen vil nærme seg et grensenivå M_* , og bestem dette. Hvor mange dager vil det ta fra behandlingen startet til medisinnmengden i kroppen er større enn 95% av M_* ?

Oppgave 6 Michaelis–Menten-ligningen

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{y}{1+y}$$

brukes i biokjemien til å beskrive virkningen av et enzym.

- a) Vis at for $y > 0$ er den generelle løsningen på implisitt form gitt ved

$$y + \ln y = C - t$$

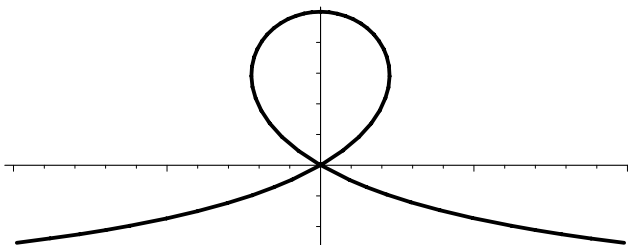
der C er konstant.

La heretter $y(t)$ være en løsning av Michaelis–Menten-ligningen som oppfyller initialbetingelsen $y(0) = 1$. Ved hvilket tidspunkt t er $y = 0,3$?

- b) Svaret på spørsmålet foran får oss til å tro at $y(2) \approx 0,3$. Finn en bedre tilnærming til $y(2)$ ved én iterasjon med Newtons metode.

Oppgave 7 Figuren viser *konkoiden til Nikodemes*, som er kurven gitt i polarkoordinater ved ligningen

$$r = 2 - \frac{1}{\sin \theta}, \quad 0 < \theta < \pi.$$



Beregn arealet av området innenfor løkken.