NTNU
Institutt for matematiske fag

TMA4100 Matematikk 1
Løsningsforslag

15. august 2023

1 Delbrøkoppspalting gir

$$\frac{x^2}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{3(x-1)} + \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}.$$

Dermed er

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(x-1)(x^2+x+1)}\,dx &= \int \left(\frac{1}{3(x-1)} + \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}\right) dx \\ &= \frac{1}{3}\ln(|x-1|) + \frac{1}{3}\ln(x^2+x+1) + C \\ &= \ln\left(|x-1|^{1/3}(x^2+x+1)^{1/3}\right) + C.\end{aligned}$$

2 I vårt tilfelle er $a = 0.00$, $b = 2.00$ og $n = 4$ slik at

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2.00}{4} = 0.50.$$

Dermed er

$$x_i = x_0 + ih = 0.00 + 0.50i = 0.50i, \qquad i = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Trapesmetoden (med $n = 4$) gir så

$$\begin{aligned}T_4 &= \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{4}\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right) \\ &= 0.25\left(f(0.00) + 2f(0.50) + 2f(1.00) + 2f(1.50) + f(2.00)\right) \\ &= 0.25\,(1.00 + 2\cdot 0.78 + 2\cdot 0.37 + 2\cdot 0.11 + 0.02) \\ &= 0.25\cdot 3.54 \approx 0.89.\end{aligned}$$

Altså har vi tilnærmingen

$$\int_0^2 f(x)\,dx \approx T_4 \approx 0.89.$$

3 Legg merke til at

$$\frac{1-\cos(x)}{\ln(1+x^2)}$$

er et ubestemt uttrykk av type «0/0» i $x = 0$. Deriverer vi telleren for seg og nevneren for seg får vi

$$\frac{\sin(x)}{\frac{2x}{1+x^2}} = \frac{(1+x^2)\sin(x)}{2x}$$

som også er et ubestemt uttrykk av type «0/0» i $x = 0$. Deriverer vi telleren for seg og nevneren for seg får vi

$$\frac{2x\sin(x) + (1+x^2)\cos(x)}{2}.$$

Siden

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin(x) + (1+x^2)\cos(x)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

gir l'Hôpitals regel at

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)\sin(x)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\sin(x) + (1+x^2)\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}.$$

4 Buelengden til en kurve gitt som grafen til $y = f(x)$ fra $x = a$ til $x = b$ er gitt ved

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

I vårt tilfelle er $a = 0$, $b = \pi/2$ og

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{\cos(t)}\, dt$$

slik at

$$f'(x) = \sqrt{\cos(x)}$$

der den siste likheten følger ved analysens fundamentalteorem.

Altså er buelengden som det spørres om i oppgaveteksten gitt ved

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos(x)}\, dx$$

som vi skulle vise.

For å regne ut L gjør vi bruk av at $1 + \cos(2y) = 2\cos^2(y)$ holder for alle y, og da spesielt $y = x/2$, slik at

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos(x)}\, dx = 2\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \cos(2y)}\, dy = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \cos(y)\, dy = 2\sqrt{2}\,[\sin(y)]_0^{\pi/4} = 2.$$

5 Vi er gitt rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

der

$$a_n = \frac{\ln\left(\frac{n}{100}\right)}{n^{2023}}.$$

Dermed er

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{\ln\left(\frac{n+1}{100}\right)}{(n+1)^{2023}}\right|}{\left|\frac{\ln\left(\frac{n}{100}\right)}{n^{2023}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2023} \left|\frac{\ln\left(\frac{n+1}{100}\right)}{\ln\left(\frac{n}{100}\right)}\right| = 1.$$

Forholdstesten vil ikke gi en konklusjon om hvorvidt rekken konvergerer absolutt eller ei da $\rho = 1$.

Det at

$$\frac{\ln\left(\frac{n}{100}\right)}{n^{2023}} < 0$$

for $n = 1, 2, \ldots, 99$ har ingenting å si da konvergens av en rekke avgjøres av oppførselen til halen til rekken. Det vil si, vi kan se bort i fra de første 99 leddene når vi tester for konvergens.

Fra oppgaveteksten vet vi at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{n}{100}\right)}{n^q} = 0 \tag{1}$$

for alle $q > 0$.

La så følgene $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ og $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ være gitt ved

$$a_n = \frac{\ln\left(\frac{n}{100}\right)}{n^{2023}} \qquad \text{og} \qquad b_n = \frac{1}{n^{2022}}.$$

Siden

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2022}}$$

konvergerer (det er en p-rekke med $p = 2022 > 1$), og

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln\left(\frac{n}{100}\right)}{n^{2023}}}{\frac{1}{n^{2022}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{n}{100}\right)}{n} = 0$$

der den siste likheten følger fra (1) med $q = 1$, gir grensesammenligningstesten at rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left(\frac{n}{100}\right)}{n^{2023}}$$

konvergerer.

6 Integralet

$$\int_0^b \left(x - x^2\right) dx \tag{2}$$

blir størst mulig når integranden alltid er positiv. Legg merke til at $x - x^2 \geqslant 0$ for alle $x \in [0, 1]$. Altså må $b = 1$ for at (2) skal bli størst mulig.

7 Ved å gange

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = \frac{e^{x^2}}{(x+1)^2}$$

med e^{-x^2} får vi

$$e^{-x^2}\frac{dy}{dx} - 2xe^{-x^2}y = e^{-x^2}\frac{e^{x^2}}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Dette kan vi så skrive som

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}y\right) = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Integrasjon med hensyn på x gir så

$$e^{-x^2}y = \int \frac{1}{(x+1)^2}\, dx = -\frac{1}{x+1} + C.$$

Altså er

$$y(x) = Ce^{x^2} - \frac{e^{x^2}}{x+1}.$$

Fra $y(0) = 5$ får vi at $5 = C - 1$ som gir $C = 6$. Dermed er

$$y(x) = 6e^{x^2} - \frac{e^{x^2}}{x+1} = \frac{(6x+5)e^{x^2}}{x+1}.$$

8 Fra definisjonen av følgen har vi

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{3 - a_1} = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2} \quad \text{og} \quad a_3 = \frac{1}{3 - a_2} = \frac{1}{3 - 1/2} = \frac{2}{5}$$

slik at $a_3 < a_2 < a_1$. Det kan derfor virke som om at følgen er avtagende, det vil si, at

$$a_{n+1} \leqslant a_n \tag{3}$$

for alle n.

Anta så at (3) holder for $n = k$. Vi ønsker å vise at det medfører at $a_{k+2} \leqslant a_{k+1}$. Fra definisjonen av følgen har vi så at

$$a_{k+2} = \frac{1}{3 - a_{k+1}} \leqslant \frac{1}{3 - a_k} = a_{k+1}$$

der ulikheten følger ved antagelsen om at $a_{k+1} \leqslant a_k$.

Dermed har vi vist ved induksjon at (3) holder for alle n. Altså er følgen avtagende.

Siden $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er både avtagende og nedad begrenset av 0 må den konvergere ettersom alle monotone og begrensede følger konvergerer. La så

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n$$

slik at

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3-a_n} = \frac{1}{3-a},$$

det vil si,

$$a^2 - 3a + 1 = 0$$

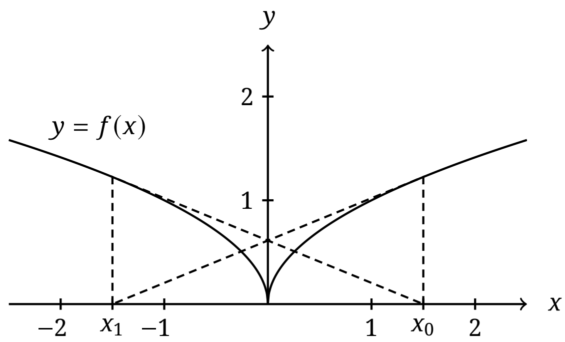
som har løsning

$$a_1 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 0.38 \qquad \text{og} \qquad a_2 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 2.62.$$

Men da følgen er avtagende med $a_1 = 1$ kan vi eliminiere a_2. Altså står vi igjen med at

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 0.38.$$

9 Se figuren til høyre for en skisse av grafen til $y = f(x)$.



La $x_0 > 0$. Da gir Newtons metode at

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{\sqrt{x_0}}{\frac{1}{2\sqrt{x_0}}} = -x_0.$$

Newtons metode gir altså at $x_1 = -x_0$. Helt tilsvarende får vi at $x_2 = -x_1 = x_0$ (husk at $f(x) = \sqrt{-x}$ for $x < 0$). Se figuren for hvordan dette blir med $x_0 = 1.5$.

Altså vil ikke Newtons metode kunne gi oss løsningen til $f(x) = 0$ fordi x_i vil veksle mellom x_0 og $-x_0$ avhengig av om i er et partall eller oddetall.

10 La $g(x) = e^{-x^2} - x^2$. Da $g(x)$ er kontinuerlig på $[0,1]$, og $g(0) = 1 - 0 > 0$ og $g(1) = e^{-1} - 1 < 0$, gir skjæringssetningen at det finnes minst en $x \in [0,1]$ slik at $g(x) = 0$.

Siden

$$g'(x) = -2xe^{-x^2} - 2x = -2x\left(e^{-x^2} + 1\right) < 0$$

for alle $x \in (0,1)$ må $g(x)$ være en strengt avtagende funksjon på intervallet $[0,1]$. Dermed har vi at det finnes nøyaktig én $x = r \in [0,1]$ slik at $g(r) = 0$. Altså har ligningen $e^{-x^2} = x^2$ nøyaktig én løsning r i intervallet $[0,1]$.

Taylorploynomet $P_4(x)$ til $f(x) = e^{-x^2}$ av grad 4 om $x = 0$ er gitt ved

$$\begin{aligned} P_4(x) &= f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}(x-0)^4 \\ &= 1 + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4. \end{aligned}$$

Fra formelarket vet vi at taylorrekken om $x = 0$ til $f(x)$ er

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + O(x^6)$$

slik at

$$P_4(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2}.$$

For å finne en tilnærmet verdi t for r ser vi på ligningen

$$P_4(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} = x^2$$

det vil si,

$$x^4 - 4x^2 + 2 = 0. \tag{4}$$

La så $z = x^2$ slik at (4) kan skrives som

$$z^2 - 4z + 2 = 0$$

som har løsning $z = 2 \pm \sqrt{2}$. Dermed har (4) løsning

$$x = \pm\sqrt{2 - \sqrt{2}} \qquad \text{og} \qquad x = \pm\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

der vi har brukt at $x = \pm\sqrt{z}$.

Da $x \in [0, 1]$ kan vi eliminere alle løsningene bortsett fra $x = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$. Altså er

$$t = \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$