Oppgave 1 Bruk av Eulers metode med $f(x,y) = 1 + 2xy^2$, $y_0 = y(0) = 1$ og $h = 0.1$ gir

$$y(0.1) \approx y_1 = 1 + 0.1(1 + 2 \cdot 0 \cdot 1^2) = 1.1$$

og

$$y(0.2) \approx y_2 = 1.1 + 0.1(1 + 2 \cdot 0.1 \cdot 1.1^2) = 1.2242.$$

Oppgave 2 Delbrøkoppspalting gir

$$\frac{3x-1}{x^2+x-6} = \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+3}.$$

Dermed får vi at et ubestemt integral til den gitte funksjonen blir

$$\int \frac{3x-1}{x^2+x-6}\,dx = \int \frac{1}{x-2}\,dx + 2\int \frac{1}{x+3}\,dx = \ln|x-2| + 2\ln|x+3| = \ln|x-2|(x+3)^2.$$

Vi får da

$$\int_4^a \frac{3x-1}{x^2+x-6}\,dx = \ln(a-2)(a+3)^2 - \ln 98.$$

Vi vet at funksjonen $\ln x$ går mot uendelig når x går mot uendelig, så uttrykket over går mot uendelig når a går mot uendelig. Så det uegentlige integralet gitt i oppgaven divergerer.

Oppgave 3 Ved å sette inn den oppgitte rekkeutviklingen for e^{-x} og foreta leddvis integrasjon får vi

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n!} + \ldots\right) dx \\ &= 1 - \frac{1}{2\cdot 2!} + \frac{1}{3\cdot 3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot n!} + \ldots \end{aligned}$$

Dette er en alternerende rekke der leddene går mot 0, så den konvergerer. Kall verdien vi får ved å kutte etter n ledd for L_n. Vi vet da at $|I - L_n|$ er mindre enn absoluttverdien av ledd $n+1$. Dvs at dersom vi velger n så stor at

$$\frac{1}{(n+1)(n+1)!} < 0.002$$

så er vi sikret den ønskede nøyaktigheten. Ved å prøve med verdier for n ser vi at $n = 4$ gir $\frac{1}{5\cdot 5!} = \frac{1}{600} < 0.002$, og at dette er den lavest mulige verdien for n vi kan ha for å være sikker.

Oppgave 4 Med f som gitt i oppgaven og $f(0)$ definert til å være 0 kan vi skrive

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

For $x > 0$ og $x \to 0$ vil $\sqrt{x} \to 0$, og tilsvarende vil for $x < 0$ og $x \to 0$, $\sqrt{-x} \to 0$. Altså er $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$ som viser at f er kontinuerlig i $x = 0$.

For å sjekke deriverbarhet i $x = 0$ ser vi på ($h > 0$) $\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h}}$. Dette uttrykket går mot uendelig, så denne grenseverdien eksisterer ikke. Tilsvarende eksisterer heller ikke grenseverdien når vi går mot 0 fra venstre, så f er ikke deriverbar i $x = 0$. Grafen til f har en vertikal tangent i $x = 0$.

Oppgave 5

(i) Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n/2}}$ konvergerer. Det kan vi se ved å bruke forholdstesten. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n}\frac{2^{n/2}}{2^{(n+1)/2}} = \frac{n+1}{n}\frac{1}{\sqrt{2}}$. Når $n \to \infty$ går dette mot $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, og rekken konvergerer ved forholdstesten.

(ii) Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$ divergerer. Det kan vi se ved å bruke grensesammenligningstesten med den divergente rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ (divergent p-rekke med $p < 1$). Vi ser på forholdet mellom $\frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$ og $\frac{1}{\sqrt{n}}$: $\frac{n}{\sqrt{n^3+1}} / \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1+1/n^3}}$. Dette uttrykket går mot $1 > 0$ når n går mot uendelig. Dermed divergerer den gitte rekken ved grensesammenligningstesten.

(iii) Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}})^2$ konvergerer. Det kan vi se ved å bruke grensesammenligningstesten med den konvergente rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Vi ser på forholdet mellom $(\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}})^2$ og $1/n^2$: $(\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}})^2 / \frac{1}{n^2} = (\frac{(n+1)^n}{n^n})^2 = ((1+\frac{1}{n})^n)^2$. Det er kjent at $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$. Dermed får vi $\lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}})^2}{\frac{1}{n^2}} = e^2 < \infty$, og den gitte rekken konvergerer ved grensesammenligningstesten.

Oppgave 6 Sett $g(x) = \ln\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)$. Vi får da

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\cos x}{1+\sin x} \cdot \frac{d}{dx}\frac{1+\sin x}{\cos x} \\ &= \frac{\cos x}{1+\sin x} \cdot \frac{\cos^2 x + (1+\sin x)\sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{1+\sin x}\frac{1+\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}. \end{aligned}$$

For å finne buelengden må vi regne ut buelengdeelementet

$$ds = \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = \sqrt{1+(-\sin x/\cos x)^2}\,dx = \sqrt{1+\tan^2 x} = \frac{1}{\cos x}\,dx.$$

Buelengden blir da

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos x}\,dx.$$

Fra tidligere i oppgaven vet vi at $\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right) = \frac{1}{\cos x}$. Dermed får vi

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos x}\,dx = \ln\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)\Big|_0^{\pi/4} = \ln\frac{1+1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}} = \ln(\sqrt{2}+1).$$

Oppgave 7 La x være avstanden fra punktet på stranda som er nærmest holmen bort til der båten treffer stranda. Da blir avstanden man må ro lik $\sqrt{4+x^2}$, og avstanden man må gå blir lik $3-x$. Den samlede tiden man bruker på hele distansen blir da

$$t(x) = \frac{\sqrt{4+x^2}}{3} + \frac{3-x}{5}.$$

For å finne minste verdi av $t(x)$ kan vi derivere $t(x)$ og sette den deriverte lik 0. Vi får

$$t'(x) = \frac{1}{3}\frac{x}{\sqrt{4+x^2}} - \frac{1}{5} = 0$$

som forenkler seg til

$$5x = 3\sqrt{4+x^2}.$$

Kvadrering på begge sider og forenkling gir $16x^2 = 36$ som har positiv løsning $x = \frac{3}{2}$. Innsatt i uttrykket for $t(x)$ får vi $t(\frac{3}{2}) = \frac{68}{60}$. Dette er gitt i timer, slik at den kortest mulige tiden er 1 time og 8 minutter.

Oppgave 8

For å finne overflatearealet regner vi først ut buelengdeelementet

$$ds = \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \sqrt{1 + \sinh^2 x}\, dx = \cosh x\, dx.$$

Flateelementet er da gitt ved $dS = 2\pi r(x)\, ds$ der $r(x)$ er avstanden til omdreiningsaksen, som i dette tilfellet er $y = -1$. Dermed blir $r(x) = 1 + \cosh x$, og vi får

$$S = 2\pi \int_0^1 (1 + \cosh x) \cosh x\, dx = 2\pi \int_0^1 (\cosh x + \cosh^2 x)\, dx.$$

Ved å bruke $\cosh^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cosh 2x)$ får vi videre

$$S = 2\pi[\sinh x + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sinh 2x]_0^1 = 2\pi(\sinh 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sinh 2).$$

Dette er greit som svar, men ved å innføre $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - 1/e^x)$ kan svaret også angis som

$$S = \pi(1 + e - \frac{1}{e} + \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4e^2}).$$

Oppgave 9 Det første leddet i følgen, $a_1 < 3$. Anta så at ledd nr k er mindre enn 3, og vis at da må ledd nr $k + 1$ også være mindre enn 3:

$$a_{k+1} = \sqrt{6 + a_k} < \sqrt{6 + 3} = \sqrt{9} = 3.$$

Dette viser da at ledd nr $k + 1$ er mindre enn 3, og dermed er alle leddene i følgen mindre enn 3 ved induksjon.

Ved utregning får vi $a_2 = \sqrt{6 + 1} = \sqrt{7} > 1 = a_1$. Dermed vet vi at $a_1 < a_2$, så anta at $a_k < a_{k+1}$. Vi får videre $a_{k+1} = \sqrt{6 + a_k} < \sqrt{6 + a_{k+1}} = a_{k+2}$. Av dette følger, siden $a_1 < a_2$, at $a_n < a_{n+1}$ for alle $n \geq 1$.

Vi har nå vist at vi har en følge som er monotont voksende og opptil begrenset, og en slik følge konvergerer.

Sett $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. La $n \to \infty$ på begge sider i $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$. Da får vi $a = \sqrt{6 + a}$, som ved kvadrering og forenkling gir $a^2 - a - 6 = 0$. Denne likninga har to røtter, 3 og -2, men siden den grenseverdien vi er på jakt etter er positiv (> 1), så må $a = 3$.

Oppgave 10

Ved inspeksjon ser vi at $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$ har et nullpunkt i $x = 1$. Ved polynomdivisjon får vi $f(x) = (x-1)(x^3 + 3x^2 - 4)$, og ved inspeksjon ser vi videre at $x^3 + 3x^2 - 4$ også har et nullpunkt i $x = 1$. Ny polynomdivisjon gir

$$f(x) = (x-1)^2(x^2 + 4x + 4) = (x-1)^2(x+2)^2.$$

Fra dette kan vi regne ut

$$f'(x) = 2(x-1)(x+2)^2 + 2(x-1)^2(x+2) = 2(x-1)(x+2)(2x+1).$$

Drøfting av dette uttrykket gir at $f'(x) > 0$ når $-2 < x < -\frac{1}{2}$ og når $x > 1$. Videre er $f'(x) < 0$ når $x < -2$ og $-\frac{1}{2} < x < 1$. Funksjonen vokser altså i intervallene $(-2, -\frac{1}{2})$ og $(1, \infty)$ og den avtar i intervallene $(-\infty, -2)$ og $(-\frac{1}{2}, 1)$. $f(1) = f(-2) = 0$, og for alle andre verdier av x er $f(x) > 0$, så f har en minste verdi, nemlig 0. f er et polynom av grad 4, så $f(x) \to \infty$ når $x \to \pm\infty$, dvs. f har ingen største verdi.

Grafen til f er symmetrisk om den rette linja $x = -\frac{1}{2}$ dersom funksjonsverdiene i x-verdier som ligger like langt fra $x = -\frac{1}{2}$ på begge sider, er like store. Dette kan uttrykkes ved at $f(x) = f(-x-1)$ for alle x. Utregning gir

$$f(-x-1) = (-x-1-1)^2(-x-1+2)^2 = (-x-2)^2(-x+1)^2 = (x+2)^2(x-1)^2 = f(x).$$