TMA4100 Matematikk 1 Løsningsforslag

1. desember 2022

1 Delbrøkoppspalting gir

$$\frac{x^2}{(x+1)(x-1)(x-2)} = \frac{1}{6(x+1)} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{4}{3(x-2)}.$$

Dermed er

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(x+1)(x-1)(x-2)}\,dx &= \int \left(\frac{1}{6(x+1)} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{4}{3(x-2)}\right) dx \\ &= \frac{1}{6}\ln(|x+1|) - \frac{1}{2}\ln(|x-1|) + \frac{4}{3}\ln(|x-2|) + C \\ &= \ln\left(\frac{|x+1|^{1/6}|x-2|^{4/3}}{|x-1|^{1/2}}\right) + C.\end{aligned}$$

2 For å finne den minste vertikale avstanden mellom de to parablene $y_1 = x^2+1$ og $y_2 = x - x^2$, lar vi $f(x) = (x^2+1) - (x - x^2) = 2x^2 - x + 1$ og finner hvor denne funksjonen tar sin minste verdi.

Legg merke til at grafen til $y = f(x)$ er en parabel og at $f(x)$ er konveks for alle x. Dermed må $f(x)$ ha en minste verdi. Fra

$$f'(x) = 4x - 1 = 0$$

får vi at $x = 1/4$ er et kritisk punkt. Det er ingen andre kandidater til hva som kan være den minste verdien for $f(x)$. Altså blir den minste vertikale avstanden mellom de to parablene gitt ved

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \frac{7}{8}.$$

3 La

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} - \sqrt{1-x}$$

slik at

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{2x^2}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}}.$$

Newtons metode gir så at

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Innsatt for $x_0 = 0.8$ får vi så

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \approx 0.8 - \frac{0.0406}{1.2519} \approx 0.7676 \\ x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 0.7676 - \frac{f(0.7676)}{f'(0.7676)} \approx 0.7668.\end{aligned}$$

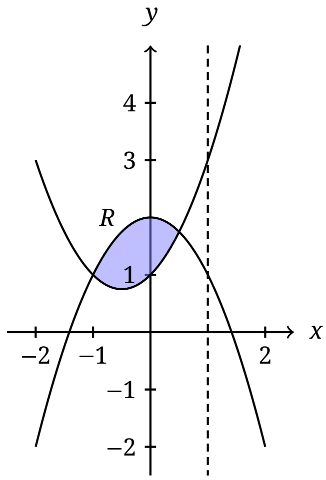
Løsningen til $f(x) = 0$ med to desimalers nøyaktighet ser dermed ut til å være lik 0.77. Det vil si, vi gjetter på at løsningen ligger i intervallet $[0.765, 0.775)$.

Siden $f(x)$ er kontinuerlig på dette intervallet, og $f(0.765) < 0$ og $f(0.775) > 0$, vet vi fra skjæringssetningen at løsningen til $f(x) = 0$ må ligge i intervallet $[0.765, 0.775)$.

Altså er løsningen med to desimalers nøyaktighet lik 0.77.

4 La R være området i xy-planet som er begrenset av grafen til $y = f(x) = x^2 + x + 1$ og grafen til $y = g(x) = 2 - x^2$.

Se figuren til høyre.



Vi finner så skjæringspunktene mellom de to kurvene. Fra

$$g(x) - f(x) = 2 - x^2 - (x^2 + x + 1) = 1 - x - 2x^2 = 0$$

får vi at de to kurvene skjærer hverandre i

$$x = \frac{1}{2} \qquad \text{og} \qquad x = -1.$$

Vi skal regne ut volumet av omdreiningslegemet som oppstår når vi dreier R om linjen $x = 1$.

Sylinderskallmetoden gir så

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{-1}^{1/2} (1 - x)\,(1 - x - 2x^2)\,dx = 2\pi \int_{-1}^{1/2} (2x^3 - x^2 - 2x + 1)\,dx \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x\right]_{-1}^{1/2} = \frac{45\pi}{16}. \end{aligned}$$

5 Ved å benytte substitusjonen $u = x^2 + 1$ får vi

$$\int_1^R \frac{x}{x^2 + 1}\,dx = \frac{1}{2}\int_2^{R^2+1} \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\big(\ln(R^2 + 1) - \ln(2)\big).$$

For en vilkårlig $a \in \mathbb{R}$ har vi så at

$$\int_1^R \frac{ax}{x^2 + 1}\,dx = \frac{a}{2}\big(\ln(R^2 + 1) - \ln(2)\big).$$

Altså er

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \left(\frac{ax}{x^2 + 1} - \frac{1}{2x}\right) dx &= \lim_{R\to\infty} \left[\frac{a}{2}\ln(x^2 + 1) - \frac{1}{2}\ln(x)\right]_1^R \\ &= \lim_{R\to\infty} \left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{(x^2 + 1)^a}{x}\right)\right]_1^R = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{(R^2 + 1)^a}{R}\right) - \ln\left(2^a\right)\right). \end{aligned}$$

For at integralet skal konvergere må grenseverdien

$$\lim_{R\to\infty} \ln\left(\frac{(R^2 + 1)^a}{R}\right)$$

eksistere. Dersom $a > 1/2$ vil $(R^2 + 1)^a > R$, og dersom $a < 1/2$ vil $(R^2 + 1)^a < R$. Altså er

$$\lim_{R\to\infty} \ln\left(\frac{(R^2 + 1)^a}{R}\right) = \infty$$

for $a > 1/2$, og

$$\lim_{R\to\infty} \ln\left(\frac{(R^2 + 1)^a}{R}\right) = -\infty$$

for $a < 1/2$. Dersom $a = 1/2$ får vi

$$\lim_{R\to\infty} \ln\left(\frac{\sqrt{R^2 + 1}}{R}\right) = \lim_{R\to\infty} \ln\left(\sqrt{1 + \frac{1}{R^2}}\right) = \ln(1) = 0.$$

Altså konvergerer integralet for $a = 1/2$ der

$$\int_1^{\infty} \left(\frac{(1/2)x}{x^2+1} - \frac{1}{2x} \right) dx = -\frac{1}{2} \ln(2^{1/2}) = -\frac{1}{4} \ln(2).$$

$\boxed{6}$ Fra oppgaveteksten har vi at endringsraten (dS/dt) for antall smittede innbyggere er proporsjonal (med proporsjonalitetskonstant a) med de som er smittet (S) og de som ikke er smittet ($5000 - S$). Altså er

$$\frac{dS}{dt} = aS(5000 - S). \tag{1}$$

Legg merke til at (1) er en separabel førsteordens differensialligning. Løsning ved separasjon av variabler gir

$$\int \frac{1}{aS(5000-S)}\, dS = \int dt = t + C_1.$$

Delbrøkoppspalting gir

$$\frac{1}{S(5000-S)} = \frac{1}{5000} \left(\frac{1}{S} + \frac{1}{5000-S} \right)$$

slik at

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{aS(5000-S)}\, dS &= \frac{1}{a} \int \frac{1}{S(5000-S)}\, dS \\
&= \frac{1}{5000a} \left(\ln(|S|) - \ln(|5000-S|) \right) + C_2 \\
&= \frac{1}{5000a} \ln\left(\left| \frac{S}{5000-S} \right| \right) + C_2.
\end{aligned}$$

Altså er

$$\frac{1}{5000a} \ln\left(\left| \frac{S}{5000-S} \right| \right) = t + C, \qquad C = C_1 - C_2.$$

Det vil si,

$$\ln\left(\left| \frac{S}{5000-S} \right| \right) = 5000at + 5000aC$$

som gir

$$\frac{S}{5000-S} = Ke^{5000at} \tag{2}$$

der $K = \pm e^{5000aC}$. Fra oppgaveteksten vet vi at $S(0) = 250$ som gir

$$K = \frac{250}{5000-250} = \frac{1}{19}.$$

Fra oppgaveteksten har vi også at $S(7) = 1250$ slik at

$$Ke^{5000a\cdot 7} = \frac{1}{19} e^{35000a} = \frac{1250}{5000-1250} = \frac{1}{3}$$

som gir

$$e^{35000a} = \frac{19}{3}.$$

Det vil si,

$$a = \frac{1}{35000} \ln\left(\frac{19}{3} \right).$$

Fra (2) får vi innsatt for $K = 1/19$ og $a = (\ln(19/3))/35000$ at

$$S(t) = \frac{5000}{1 + 19e^{-(t/7)\ln(19/3)}} = \frac{5000}{1 + 19\left(\frac{3}{19}\right)^{t/7}}.$$

Vi skal bestemme t slik at $S(t)$ er lik 80 % av byens innbyggere, det vil si, 4000. Ved å løse

$$\frac{5000}{1+19\left(\frac{3}{19}\right)^{t/7}} = 4000$$

med hensyn på t får vi

$$t = -\frac{7\ln(76)}{\ln\left(\frac{3}{19}\right)} \approx 16.42.$$

Altså tar det tilnærmet 16.42 dager før 80 % av byens innbyggere er smittet med sykdommen.

7 **(i)** Vi ser på rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

der

$$a_n = (-1)^n \frac{\cos^2(n)}{n^{2022}}.$$

Ettersom $0 \leqslant \cos^2(n) \leqslant 1$ for alle naturlige tall $n \geqslant 1$ vil

$$|a_n| = \frac{\cos^2(n)}{n^{2022}} \leqslant \frac{1}{n^{2022}}$$

for alle $n \geqslant 1$. Og da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2022}}$$

er en p-rekke med $p = 2022$, som dermed må være konvergent ved for eksempel integraltesten, kan vi slutte ved sammenligningstesten at

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos^2(n)}{n^{2022}}$$

er absolutt konvergent.

(ii) Siden

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2-3n^3}{4n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5}{n}-3}{4+\frac{1}{n^3}} = \frac{0-3}{4+0} = -\frac{3}{4} \neq 0$$

gir divergenstesten at rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2-3n^3}{4n^3+1}$$

divergerer.

8 La

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^r}$$

som gir

$$f'(x) = -\frac{r}{(1+x)^{r+1}}.$$

Taylorpolynomet til $f(x)$ av grad 1 om punktet $x = 0$ er så gitt ved

$$P_1(x) = f(0) + f'(0)(x-0) = 1 - rx.$$

Fra Taylors teorem vet vi så at

$$E_1(x) = f(x) - P_1(x) = \frac{f''(s)}{2}x^2$$

for en s mellom 0 og x. I vårt tilfelle er

$$f''(x) = \frac{r(r+1)}{(1+x)^{r+2}} > 0$$

for alle $x > 0$. Dermed er $E_1(x) > 0$ for alle $x > 0$ som igjen gir at

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^r} > 1 - rx = P_1(x)$$

for alle $x > 0$.

9 Fra definisjonen av den deriverte har vi

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{hg(h) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} g(h) = g(0)$$

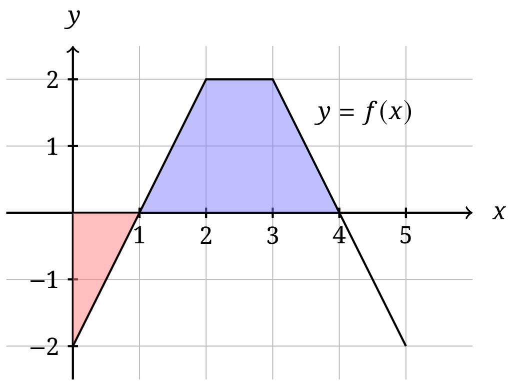
der den siste likheten følger av antagelsen om at $g(x)$ er kontinuerlig i $x = 0$. Altså er $f(x)$ deriverbar i $x = 0$, og $f'(0) = g(0) = 2\pi$.

10 Fra oppgaveteksten har vi at

$$g(4) = \int_0^4 f(t)\,dt.$$

Dermed blir $g(4)$ lik summen av arealet av det røde feltet og arealet av det blå feltet, der arealet av det røde feltet ganges med -1 (hvorfor det?). Det vil si,

$$g(4) = -1 + 4 = 3.$$



Analysens fundamentalteorem gir at

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\,dt = f(x)$$

slik at

$$g'(4) = f(4) = 0.$$