NTNU
Institutt for matematiske fag

TMA4100 Matematikk 1
Løsningsforslag

Eksamen 17. august 2021

Dette løsningsforslaget svarer til den kombinasjonen av oppgaver for eksamensoppgavene som er lagt ut.

1 Følgende påstander er **riktige**:

- Differensialligningen
$$(x^2+1)\frac{dy}{dx}+3x(y-1)=0$$
er både separabel og lineær.
Begrunnelse: Differensialligningen kan skrives på formen
$$\frac{dy}{dx}+\frac{3x}{x^2+1}y=\frac{3x}{x^2+1}$$
og på formen
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3x}{x^2+1}(y-1).$$
Altså er den henholdsvis lineær og separabel i henhold til klassifikasjonen av første ordens ordinære differensialligninger.
- Dersom $f'(x)=g'(x)$ for alle x i et intervall (a,b), så er
$$f(x)-g(x)=c$$
for alle $x\in(a,b)$, der c er en konstant.
Begrunnesle: Dette er en direkte konsekvens av sekantsetningen.

Følgende påstander er **feil**:

- Vi kan bruke forholdstesten til å vise konvergens av rekken
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$
Begrunnelse: I dette tilfellet feiler forholdstesten ettersom
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1$$
der $a_n=1/n^2$. For å vise konvergens av rekken kan vi for eksempel bruke integraltesten.
- Dersom
$$f(x)=\int_1^{x^2}\cos(t^2)\,dt$$
så er
$$f'(x)=2x\cos(x^4)-\cos(1).$$
Begrunnelse: Analysens fundamentalteorem gir
$$f'(x)=2x\cos(x^4).$$

2 Paringen er som følger:

	$\int_0^1 \frac{2}{1+x^2}\,dx$	$\int_0^1 \sin(1+x)\,dx$	$\int_{-1}^0 \sin(1+x)\,dx$	$\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx$
$2\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2+i^2}$	-	-	-	✓
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{n+i}{n}\right)$	-	✓	-	-
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{i}{n}\right)$	-	-	✓	-
$2n\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2+i^2}$	✓	-	-	-

Begrunnelse: Riemannsummer kan generelt skrives som

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

der $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Det er ofte lurt å skille lengden av intervall nummer i, Δx_i, fra funksjonsverdien $f(c_i)$. Vi kan ofte også velge $\Delta x_i = \Delta x$.

For alle de fire oppgitte integralene lar vi $\Delta x_i = \Delta x = 1/n$. Det gir at

$$2\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2+i^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{2i}{n}}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2} \quad \text{er en riemannsum for} \quad \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{n+i}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sin\left(1+\frac{i}{n}\right) \quad \text{er en riemannsum for} \quad \int_0^1 \sin(1+x)\,dx$$
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{i}{n}\right) \quad \text{er en riemannsum for} \quad \int_{-1}^0 \sin(1+x)\,dx = \int_0^1 \sin(u)\,du$$
$$2n\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2+i^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{2}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2} \quad \text{er en riemannsum for} \quad \int_0^1 \frac{2}{1+x^2}\,dx.$$

3 Ved å utnytte at

$$\lim_{x\to 4}(f(x)-5) = \lim_{x\to 4}(x-2)\cdot\frac{f(x)-5}{x-2} = \lim_{x\to 4}(x-2)\cdot\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-5}{x-2} = 2\cdot 3 = 6,$$

der den andre likheten følger av at de to grenseverdiene på høyre side av likhetstegnet eksisterer, får vi at

$$\lim_{x\to 4} f(x) = 6+5 = 11.$$

4 Fra oppgaveteksten har vi at $x(t)$, der $x(t)$ angir antall individer i befolkningen som har hørt om produktet ved tiden t, tilfredsstiller initialverdiproblemet

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(10\,000 - x), \qquad x(0) = 100.$$

Differensialligningen er både separabel og lineær. Løsning ved separasjon av variable gir

$$-\ln|10\,000 - x| = \int \frac{dx}{10\,000 - x} = \int \frac{dt}{2} = \frac{t}{2} + C.$$

Dermed er
$$10\ 000 - x(t) = Ke^{-t/2}, \qquad K = \pm e^{-C},$$
det vil si,
$$x(t) = 10\ 000 - Ke^{-t/2}.$$
Innsatt for $x(0) = 100$ får vi at $K = 9\ 900$. Altså er
$$x(t) = 10\ 000 - 9\ 900e^{-t/2}.$$
For at 95 % av befolkningen skal ha hørt om produktet må
$$x(t) = 10\ 000 \cdot 0.95 = 9\ 500 = 10\ 000 - 9\ 900e^{-t/2},$$
det vil si,
$$e^{-t/2} = \frac{5}{99}$$
som igjen gir
$$t = -2\ln\left(\frac{5}{99}\right) \approx 5.9714.$$
Altså går det omtrent 5.9714 dager fra reklamekampanjen lanseres til 95 % av befolkningen i byen har hørt om produktet.

$\boxed{5}$ La $f(x) = |x-1| - x^2 + 2$. Siden
$$f(0) = 3 > 0 \quad \text{og} \quad f(2) = -1 < 0$$
og $f(x)$ er en kontinuerlig funksjon, har vi fra skjæringssetningen at det må finnes minst ett tall $c > 0$ slik at $f(c) = 0$.

For å vise at det finnes nøyaktig ett slikt tall c ser vi på $f'(x)$. For $x \in (0,1)$ har vi at
$$f(x) = |x-1| - x^2 + 2 = 1 - x - x^2 + 2 = 3 - x - x^2$$
slik at $f'(x) = -1-2x < 0$. Altså er $f(x)$ strengt avtagende for alle $x \in (0,1)$. Siden $f(0) = 3 > 0$ og $f(1) = 1 > 0$, og vi vet at $f(x)$ er strengt avtagende for alle $x \in (0,1)$ kan det *ikke* finnes et tall c slik at $f(c) = 0$, der $c \in (0,1)$.

La så $x > 1$. Da er
$$f(x) = |x-1| - x^2 + 2 = x - 1 - x^2 + 2 = x - x^2 + 1$$
som igjen gir at
$$f'(x) = 1 - 2x < 0.$$
Dermed er $f(x)$ strengt avtagende for alle $x > 1$.

Altså er $f(x)$ strengt avtagende for alle x og vi kan slutte at det finnes nøyaktig ett tall $c > 0$ slik at $f(c) = 0$. (Faktisk har vi etablert at $c > 1$, men det er uten betydning. Oppgaven ber bare om å vise at det finnes nøyaktig ett tall c slik at $f(c) = 0$.)

$\boxed{6}$ Fra definisjonen av den deriverte får vi
$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h\cos\left(\frac{1}{h}\right).$$
Ettersom
$$-1 \leqslant \cos\left(\frac{1}{h}\right) \leqslant 1$$
for alle $h \neq 0$, er
$$-|h| \leqslant h\cos\left(\frac{1}{h}\right) \leqslant |h|$$

for alle $h \neq 0$. Og da

$$\lim_{h\to 0} \pm|h| = 0$$

gir skviseregelen at

$$\lim_{h\to 0} h\cos\left(\frac{1}{h}\right) = 0.$$

Altså er $f'(0) = 0$ og funksjonen er dermed deriverbar i $x = 0$.

$\boxed{7}$ La $2n = 4$, $a = 0$ og $b = \pi/2$ slik at

$$h = \frac{b-a}{2n} = \frac{\pi}{8}.$$

Simpsons metode gir så

$$\begin{aligned}
\mathrm{Si}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{h}{3}\left(f(0) + 4f(h) + 2f(2h) + 4f(3h) + f(4h)\right) \\
&= \frac{\pi}{24}\left(f(0) + 4f\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2f\left(\frac{\pi}{4}\right) + 4f\left(\frac{3\pi}{8}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&\approx \frac{\pi}{24}\left(1 + 4\cdot 0.9745 + 2\cdot 0.9003 + 4\cdot 0.7842 + 0.6366\right) \\
&\approx 1.3708.
\end{aligned}$$

Feilestimatet for Simpsons metode gir i vårt tilfelle at

$$\left|\int_0^{\pi/2} f(t)\,dt - S_{2n}\right| \leqslant \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{2880n^4}.$$

For at feilen skal være garantert mindre enn 10^{-6} må altså

$$\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{2880n^4} < 10^{-6}$$

som gir

$$n > \left(\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5 10^6}{2880}\right)^{1/4} \approx 7.6,$$

det vil si, $n \geqslant 8$.

$\boxed{8}$ La $a_n = (-1)^n/(2n^2+1)$. Forholdstesten gir at potensrekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2+1}x^n$$

konvergerer for

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{2(n+1)^2+1}|x| = |x| < 1.$$

Altså er konvergensradien $R = 1$.

For $x = \pm 1$ er

$$\left|\frac{(-1)^n}{2n^2+1}x^n\right| = \frac{1}{2n^2+1} < \frac{1}{n^2}$$

for alle $n \geqslant 1$, så rekken er absolutt konvergent ved sammenligning med den konvergente rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Altså konvergerer potensrekken for $|x| \leqslant 1$.

9 Vi er bedt om å finne den minste verdien til funksjonen

$$d(x) = \sqrt{x^2 + (y-15)^2} = \sqrt{x^2 + ((x+2)^3 - 15)^2},$$

der $d(x)$ angir avstanden mellom punktet (x, y) på kurven gitt ved $y = (x+2)^3$ og punktet $(0, 15)$. Siden $g(x) = \sqrt{x}$ er en strengt voksende funksjon kan vi forenkle utregningene våre ved å heller se på den minste verdien til funksjonen

$$\delta(x) = x^2 + ((x+2)^3 - 15)^2$$

da det vil også gi oss den minste verdien til $d(x)$.

Fra oppgaveteksten vet vi at

$$\delta'(x) = 2x + 2((x+2)^3 - 15) \cdot 3(x+2)^2 = 2x + 6((x+2)^3 - 15)(x+2)^2 = 0 \qquad (*)$$

har nøyaktig én løsning. Og da

$$\lim_{x \to \pm\infty} \delta'(x) = \pm\infty$$

kan vi slutte at $\delta(x)$ må ha nøyaktig ett kritisk punkt og at dette kritiske punktet vil svare til den minste verdien $\delta(x)$ (og dermed også $d(x)$) tar.

Vi bruker så Newtons metode til å løse den ikke-lineære ligningen $(*)$. Det vil si,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\delta'(x_n)}{\delta''(x_n)} = x_n - \frac{2x_n + 6((x_n+2)^3 - 15)(x_n+2)^2}{2 + 18(x_n+2)^4 + 12((x_n+2)^3 - 15)(x_n+2)}$$

La så $x_0 = 1$. Det gir følgende tabell.

n	x_n
0	1
1	0.6564
2	0.4993
3	0.4662
4	0.4648
5	0.4648

Fra tabellen kan det virke som om $x \approx 0.4648$. Siden

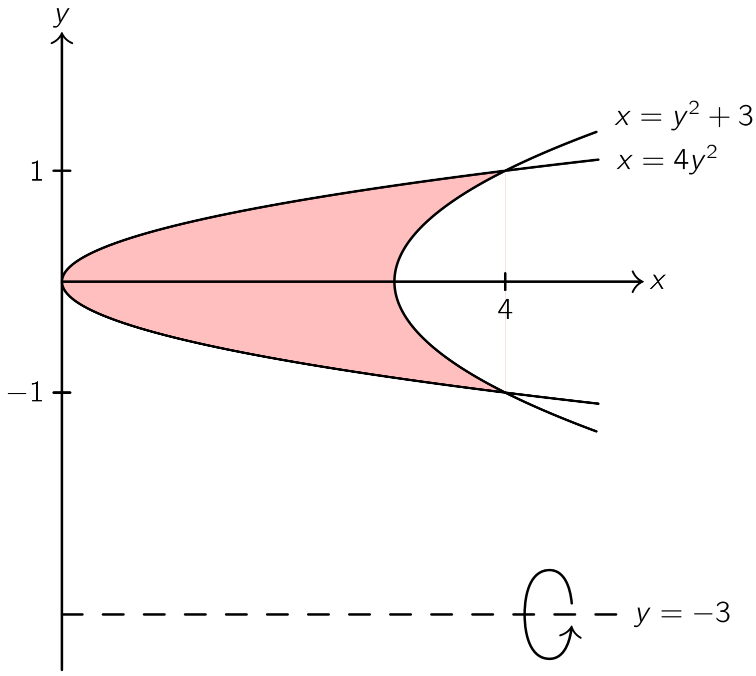
$$\delta'(0.46475) < 0 \quad \text{og} \quad \delta'(0.46485) > 0$$

gir skjæringssetningen at løsningen for $\delta'(x) = 0$ ligger i intervallet $[0.46475, 0.46485)$. Altså er $x \approx 0.4648$ nøyaktig til fire desimaler.

Punktet som ligger på kurven $y = (x+2)^3$ og som ligger nærmest $(0, 15)$ er så gitt ved

$$(x, y) \approx (0.4648, (0.4648+2)^3) \approx (0.4648, 14.9742).$$

10 Figuren under viser området i xy-planet som skal roteres om linjnen $y = -3$.



Sylinderskallmetoden gir så at

$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_{-1}^{1} (y+3)(y^2+3-4y^2)\,dy \\
&= 2\pi \int_{-1}^{1} (y+3)(3-3y^2)\,dy \\
&= 2\pi \left[\frac{3}{2}y^2 - \frac{3}{4}y^4 + 9y - 3y^3 \right]_{-1}^{1} \\
&= 24\pi.
\end{aligned}
$$