NTNU
Institutt for matematiske fag

TMA4100 Matematikk 1
Løsningsforslag

Eksamen 4. august 2020

1 Implisitt derivasjon med hensyn på x gir

$$y + xy' + e^y + xy'e^y = 0.$$

Innsatt for $(x, y) = (1, 0)$ gir det at

$$y'(1) + 1 + y'(1) = 0$$

som igjen gir at $y'(1) = -1/2$. En ligning for tangenten er så gitt ved

$$y = y'(1)(x-1) = -\frac{1}{2}(x-1) = \frac{1}{2}(1-x).$$

2 Delbrøkoppspalting gir at

$$\begin{aligned}\frac{2x}{(x-1)^2(x^2+1)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}\\ &= \frac{A(x-1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)}\\ &= \frac{(A+C)x^3 + (-A+B-2C+D)x^2 + (A+C-2D)x - A + B + D}{(x-1)^2(x^2+1)},\end{aligned}$$

det vil si,

$$A + C = 0, \quad -A + B - 2C + D = 0, \quad A + C - 2D = 2, \quad \text{og} \quad -A + B + D = 0,$$

som har løsning $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$ og $D = -1$.
Altså er

$$\int \frac{2x}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx = \int \left(\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = -\left(\frac{1}{x-1} + \arctan(x)\right) + C.$$

3 La $d(x, y)$ være avstanden mellom (x, y) og $(4, 0)$, det vil si,

$$d(x,y) = \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}.$$

La så

$$f(x) = d\left(x, \sqrt{x}\right) = \sqrt{(x-4)^2 + (\sqrt{x})^2} = \sqrt{(x-4)^2 + x} = \sqrt{x^2 - 7x + 16}, \qquad x \geq 0,$$

der vi har brukt at $y = \sqrt{x}$. Vi ønsker å finne den minste verdien $f(x)$ tar.
Siden

$$f'(x) = \frac{2x-7}{2\sqrt{x^2-7x+16}} = 0$$

har løsning $x = 7/2$, og $f'(x) < 0$ for $0 < x < 7/2$ og $f'(x) > 0$ for $x > 7/2$, må $x = 7/2$ være minimumspunktet til $f(x)$.

Altså er $(x, y) = (7/2, \sqrt{7/2})$ det punktet som ligger på grafen til $y = \sqrt{x}$ og som ligger nærmest $(4, 0)$.

4 Simpsons metode med $f(x) = \cos(x^2)$, $a = 0$, $b = \pi$ og $2n = 4$ gir at

$$S_{2n} = S_4 = \frac{h}{3}\big(f(0) + 4f(h) + 2f(2h) + 4f(3h) + f(\pi)\big),$$

der $h = (b-a)/2n = \pi/4$. Det vil si,

$$\begin{aligned} S_4 &= \frac{\pi}{12}\left(f(0) + 4f\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4f\left(\frac{3\pi}{4}\right) + f(\pi)\right) \\ &= \frac{\pi}{12}\left(1 + 4\cos\left(\frac{\pi^2}{16}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi^2}{4}\right) + 4\cos\left(\frac{9\pi^2}{16}\right) + \cos(\pi^2)\right) \\ &\approx 1.2499. \end{aligned}$$

Feilestimatet for Simpsons metode gir at

$$\left|\int_0^\pi \cos(x^2)\,dx - S_{2n}\right| \le \frac{1600\pi^5}{180(2n)^4} = \frac{5\pi^5}{9n^4},$$

der vi har brukt at $|f^{(4)}(x)| \le 1600$ for alle $x \in [0,\pi]$. Skal feilen være garantert mindre enn 10^{-3} må

$$\frac{5\pi^5}{9n^4} < 10^{-3}$$

som igjen gir at

$$n > \sqrt[4]{\frac{5000\pi^5}{9}} \approx 20.3.$$

Altså må $n \ge 21$ for at feilen

$$\left|\int_0^\pi \cos(x^2)\,dx - S_{2n}\right|$$

er garantert mindre enn 10^{-3}.

5 Siden $x(x+1) < (x+1)^2$, så er

$$0 < \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2}} = \frac{1}{x+1} < \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$$

for alle $x \ge 1$, og

$$\int_{2020}^\infty \frac{dx}{x+1} = \lim_{b\to\infty}\int_{2020}^b \frac{dx}{x+1} = \lim_{b\to\infty}\,[\ln(x+1)]_{2020}^b = \infty.$$

Altså divergerer integralet

$$\int_{2020}^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}}.$$

La $f(x) = 1/(x+1)$ for $x \ge 1$. Siden $f(x)$ er en positiv funksjon som er strengt avtagende for $x \ge 1$ og

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x+1} = \infty$$

gir integraltesten at

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

divergerer.

6 Fra formelarket vet vi at taylorrekken om $a = 0$ til $g(t) = 1/(1-t)$ er gitt som

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \qquad -1 < t < 1. \tag{$*$}$$

Ved å utnytte at

$$f(x) = \frac{x}{x^2+9} = \frac{x}{9}\frac{1}{1-\left(-\frac{x^2}{9}\right)}$$

får vi ved å sette inn for $t = -x^2/9$ i $(*)$ at taylorrekken om $a = 0$ til $f(x)$ er gitt ved

$$\frac{x}{x^2+9} = \frac{x}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x^2}{9}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{2n+2}}x^{2n+1}, \qquad -1 < \left(-\frac{x^2}{9}\right) < 1.$$

Det vil si, at taylorrekken om $a = 0$ til $f(x)$ konvergerer for $-3 < x < 3$. Altså er konvergensradien lik 3.

7 I vårt tilfelle er

$$f'(x) = \begin{cases} 4x(x^2-1) & x > 0 \\ xe^{-x}(2-x) & x < 0. \end{cases}$$

Altså er $f'(x)$ kontinuerlig for alle $x \neq 0$.

For å sjekke om $f'(x)$ er kontinuerlig i $x = 0$ må vi først sjekke om $f'(0)$ eksisterer. Siden

$$f'_{-}(0) = \lim_{h\to 0-}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-}\frac{h^2e^{-h}}{h} = \lim_{h\to 0-} he^{-h} = 0$$

og

$$f'_{+}(0) = \lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+}\frac{(h^2-1)^2-1}{h} = 0,$$

der den siste likheten følger ved l'Hôpitals regel, eksisterer $f'(x)$ i $x = 0$ hvor $f'(0) = 0$.

Siden

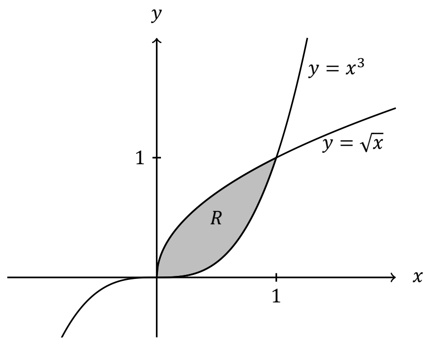
$$\lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim_{x\to 0-} xe^{-x}(2-x) = 0$$

og

$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} 4x(x^2-1) = 0$$

har vi at $f'(x)$ er kontinuerlig i $x = 0$. Altså er $f'(x)$ kontinuerlig (for alle x).

8 Kurvene $y = \sqrt{x}$ og $y = x^3$ skjærer hverandre i punktene $(0,0)$ og $(1,1)$: $\sqrt{x} = x^3$ har løsning $x = 0$ og $x = 1$, som igjen gir henholdsvis at $y = 0^3 = 0$ og $y = 1^3 = 1$. Altså skjærer kurvene hverandre i punktene $(0,0)$ og $(1,1)$.



Legg også merke til at $\sqrt{x} \geq x^3$ for alle $0 \leq x \leq 1$.

Sylinderskallmetoden gir at volumet V av omdreiningslegemet er gitt ved

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 (x+6)\left(\sqrt{x} - x^3\right) dx \\ &= 2\pi \int_0^1 \left(x^{3/2} - x^4 + 6\sqrt{x} - 6x^3\right) dx \\ &= 2\pi \left[\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{1}{5}x^5 + 4x^{3/2} - \frac{3}{2}x^4\right]_0^1 \\ &= 2\pi\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5} + 4 - \frac{3}{2}\right) = \frac{27\pi}{5}. \end{aligned}$$

9 Legg merke til at

$$\frac{\displaystyle\int_1^{x^2+1} \sin(t^2)\, dt}{3x^2}$$

er et ubestemt uttrykk av typen «0/0» når $x \to 0$.

Ved l'Hôpitals regel og analysens fundamentalteorem så er

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_1^{x^2+1} \sin(t^2)\, dt}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\sin((x^2+1)^2)}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin((x^2+1)^2)}{3} = \frac{\sin(1)}{3}.$$

10 Det er to faktorer som bidrar til at antall kg salt i tanken, $y(t)$, endrer seg: (1) saltlaken som strømmen inn med en rate $0.2 \cdot 5 = 1$ kg per minutt, og (2) saltlaken som strømmer ut med en rate $5(y/100) = y/20$ kg per minutt. Intitalbetingelsen $y(0) = 25$ fremkommer ved at konsentrasjonen av salt er oppgitt til å være 0.25 kg salt per liter, og det er 100 liter i tanken: $y(0) = 0.25 \cdot 100 = 25$. Altså er

$$y'(t) = 1 - \frac{1}{20}y(t), \qquad y(0) = 25.$$

Differensialligningen er både separabel og lineær. Løsning ved separasjon av variabler gir at

$$-20\ln\left|1 - \frac{y(t)}{20}\right| = \int \frac{dy}{1 - y/20} = \int dt = t + C$$

slik at

$$1 - \frac{y(t)}{20} = Ke^{-t/20}, \qquad K = \pm e^{-C/20},$$

det vil si,

$$y(t) = 20 - 20Ke^{-t/20}.$$

Fra $y(0) = 25$ får vi at $25 = 20 - 20K$. Altså er $K = -1/4$. Dermed er

$$y(t) = 20 + 5e^{-t/20}.$$

Antall kg salt i tanken etter 60 minutter er dermed

$$y(60) = 20 + 5e^{-60/20} = 20 + 5e^{-3} \approx 20.25.$$