NTNU
Institutt for matematiske fag

TMA4100 Matematikk 1
Løsningsforslag

Prøveeksamen høsten 2020

$\boxed{1}$ Følgende påstander er **feil**:

- *Dersom* $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ *og* $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$ *er konvergente rekker så vil også rekken* $\sum_{k=1}^{\infty} a_n b_n$ *konvergere.*

  Moteksempel: To konvergente, alternerende rekker kan multipliseres ledd for ledd, og gi ei divergent rekke. Se også $\boxed{\text{U}}$-oppgava fra interaktiv forelesning, uke 45.

- *Dersom* $\lim_{x\to c} f'(x)$ *ikke eksisterer så kan ikke* $f(x)$ *være deriverbar i* $x = c$.

  Moteksempel: Betrakt funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

  hvis deriverte er $f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$. Vi vet at $\lim_{x\to 0}\cos(1/x)$ ikke eksisterer, og dermed eksisterer heller ikke $\lim_{x\to 0} f'(x)$. Derimot, fra definisjonen av den deriverte og skviseregelen finner vi at $f'(0) = 0$.

De korrekte påstandene er:

- *Dersom* $f'(a)$ *eksisterer så er* $f(x)$ *kontinuerlig i* $x = a$.

  Begrunnelse: Dette er teorem 1 på side 109 i Adams og Essex.

- *En kontinuerlig funksjon definert på et lukket og endelig intervall* $[a, b]$ *er integrerbar på* $[a, b]$.

  Begrunnelse: Dette er teorem 2 på side 306 i Adams og Essex.

$\boxed{2}$ Følgende påstand er **korrekt**:

- *Anta* $f''(x)$ *eksisterer og er kontinuerlig i et område rundt* $x = a$. *Da er*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(a+x) - 2f(a) + f(a-x)}{x^2} = f''(a).$$

  Begrunnelse: Siden $f''(x)$ eksisterer i et område rundt $x = a$ er også $f(x)$ og $f'(x)$ kontinuerlige i samme område. Vi ser at om vi prøver å evaluere brøken i $x = 0$ får vi et «0/0»-uttrykk. Siden teller og nevner er nokså ukompliserte funksjoner av x, kan l'Hôpitals regel være en god idé her. Merk at fordi har x^2 i nevner må vi bruke regelen to ganger:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{f(a+x) - 2f(a) + f(a-x)}{x^2} &\overset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f'(a+x) - f'(a-x)}{2x} \\ &\overset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f''(a+x) + f''(a-x)}{2} = f''(a) \end{aligned}$$

  der den siste likheten følger ved kontinuitet av $f''(x)$ i $x = a$.

Resten av påstandene er gale:

- *La $f(x) = \sin(x)$, der x er angitt i grader. Da er $f'(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{180}\right)$.*

  Begrunnelse: Korrekt derivert er her $f'(x) = \frac{\pi}{180}\cos(x)$ for x angitt i grader. Se side 125 i Adams og Essex for mer informasjon.

- *En rekke $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ som tilfredsstiller $a_n a_{n+1} < 0$ for alle n og hvor $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ vil konvergere.*

  Moteksempel: Her mangler betingelsen $|a_{n+1}| < |a_n|$ for alle n fra alternerende rekketesten, og denne kan ikke utelates. Betrakt for eksempel den alternerende rekka gitt ved

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \text{ odde}, \\ -\frac{1}{n^2}, & n \text{ jevn}. \end{cases}$$

  Her er $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, men de jevne verdiene av a_n går mye raskere mot 0 enn de odde og skaper en ubalanse i kanselleringen av positive og negative bidrag. Delsummen $S_{2N}(a_n)$ kan estimeres nedenfra på følgende vis,

$$S_{2N}(a_n) = \sum_{n=1}^{2N} a_n = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{(2k)^2} \right) > \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2k}\left(1 - \frac{1}{2k}\right) \geqslant \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} = \frac{1}{4} S_N\left(\frac{1}{n}\right).$$

  Når $N \to \infty$ ser vi at rekka divergerer ved å sammenlikne med den harmoniske rekka.

- *Alle strengt voksende funksjoner $f(x)$ definert på et intervall (a, b) må tilfredsstille $f'(x) > 0$ for alle $x \in (a, b)$, der a og b er to reelle tall og hvor $b > a$.*

  Moteksempel: $f(x) = x^3$ og ethvert intervall som inneholder $x = 0$.

$\boxed{3}$ Retningsfeltet for ei differensiallikning $y' = f(x, y)$ er et plott av $f(x, y)$ i xy-planet ved hjelp av piler med stigningstall lik $f(x, y)$. Pila i (x, y) er da parallell med vektoren $(1, y'(x))$. I slike oppgaver kan det være lurt å se på tilfellene der y' er konstant, og da gjerne når $y' = 0$. Dessuten å følge med på hvor y' skifter fortegn og symmetrier. Basert på dette kan man forhåpentligvis resonnere seg fram til riktig figur, uten å måtte løse hver likning.

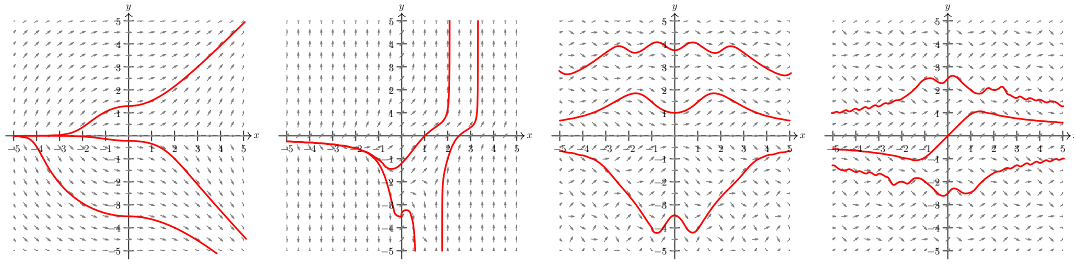
Nedenfor har vi de fire differensiallikningene:

$$1.\quad y' = \frac{|x|y}{1+y^2}, \qquad 2.\quad y' = x^2y^3 + e^{-xy} \qquad 3.\quad \left(1 + \frac{y}{10}\right)y' = \sin(xy), \qquad 4.\quad y' = \cos(xy^2).$$

La oss se nærmere på y' for disse.

1. Her er $y' = 0$ for $x = 0$ og for $y = 0$. Merk symmetriene $f(-x, y) = f(x, y)$ og $f(x, -y) = -f(x, y)$. Videre er $y' > 0$ for $y > 0$ og $y' < 0$ for $y > 0$. Spesielt den siste observasjonen gjør at vi kan utelukke alle figurer utenom figur A siden retningspilene i resten peker både opp og ned for $y < 0$. Figur A innehar også de nødvendige symmetriene.
2. Denne har ingen enkle kurver hvor y' er konstant, og heller ingen åpenbare symmetrier. Vi merker oss at når $xy \gg 0$ så er $y' \approx x^2y^3$, og da vil $y' \gg 1$ når $x, y \gg 0$, imens $y' \ll -1$ når $x, y \ll 0$. Dessuten, når $xy \ll 0$ er $y' \approx e^{-xy} \gg 1$. Dette tyder på at figur B er korrekt her, siden denne har nær vertikale piler i alle ytre hjørner av plottet, og disse peker riktig vei (ned for $x, y \ll 0$, opp for resten).
3. Her er $y' = 0$ for $x = 0$ og for $y = 0$. Merk også symmetrien $f(-x, y) = -f(x, y)$. Videre ser vi at ved å holde y fast, vil y' svinge som funksjon av x. Det er kun figurene C og D som har slike svingninger, og av disse er det kun figur C som har $y' = 0$ for $x = 0$ og $y = 0$. Denne ser også ut til å ha riktig symmetri.
4. Her er $y' = 1$ for $x = 0$ og for $y = 0$. I tillegg er $f(-x, y) = f(x, y)$ og $f(x, -y) = f(x, y)$. Ved å holde y fast, vil y' svinge som funksjon av x. Alt dette finner vi igjen i figur D.

For å oppsummere, har vi funnet at likning 1 svarer til figur A, 2 til B, 3 til C og 4 til D.



A B C D

4 Feilen til Gunnar er at han har oversett singulariteten i $x = 0$ i utregningen sin. Dermed er dette *både* et type 1 og type 2 uegentlig integral. En mulig måte å sette opp utregningen på er den følgende:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{|x|}}}{\sqrt{|x|}}\,dx &= \int_{-1}^{1} \frac{e^{-\sqrt{|x|}}}{\sqrt{|x|}}\,dx + \int_{1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{|x|}}}{\sqrt{|x|}}\,dx \\
&= 2\int_{0}^{1} \frac{e^{-\sqrt{|x|}}}{\sqrt{|x|}}\,dx + \int_{1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx & \text{(symmetri)} \\
&= 2\lim_{a\to 0+}\int_{a}^{1} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx + \lim_{R\to\infty}\int_{1}^{R} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx & \text{(uegentlige integraler)} \\
&= 4\lim_{a\to 0+}\int_{\sqrt{a}}^{1} e^{-u}\,du + 2\lim_{R\to\infty}\int_{1}^{\sqrt{R}} e^{-u}\,du & \text{(substitusjon } u=\sqrt{x}\text{)} \\
&= 4\lim_{a\to 0+}\left[-e^{-u}\right]_{\sqrt{a}}^{1} + 2\lim_{R\to\infty}\left[-e^{-u}\right]_{1}^{\sqrt{R}} \\
&= -4\left(e^{-1} - \lim_{a\to 0+} e^{-\sqrt{a}}\right) - 2\left(\lim_{R\to\infty} e^{-\sqrt{R}} - e^{-1}\right) = 4 - 2e^{-1}.
\end{aligned}$$

Som vi ser har Gunnar kommet fram til riktig svar likevel, men dette kunne ha slått feil ut.

5 Buelengden s til grafen er gitt av integralet

$$s = \int_{1}^{10} \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx,$$

så la oss først finne $y'(x)$. Analysens fundamentalteorem og kjerneregelen gir oss

$$y'(x) = \sqrt{x^2-1}\,(x^2)' = 2x\sqrt{x^2-1}.$$

Dermed er

$$1 + (y'(x))^2 = 1 + 4x^2(x^2-1) = 4x^4 - 4x^2 + 1 = (2x^2-1)^2,$$

og

$$s = \int_{1}^{10} |2x^2-1|\,dx = \int_{1}^{10} (2x^2-1)\,dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - x\right]_{1}^{10} = \frac{2}{3}\left(10^3-1\right) - (10-1) = 666 - 9 = 657.$$

6 Vi har integrallikningen

$$y(x) = 1 + \int_{0}^{x} t y(t) e^{-t}\,dt.$$

Merk at fra denne følger det at $y(0) = 1$. Vi deriverer og bruker analysens fundamentalteorem for å få ei tilhørende differensiallikning,

$$y' = xye^{-x}, \qquad y(0) = 1.$$

Denne likningen er separabel, og vi har at

$$\int \frac{dy}{y} = \int xe^{-x}\,dx,$$

der vi finner at $\ln|y|$ og $-xe^{-x} - e^{-x}$ er korresponderende antideriverte. Siden $y(0) = 1 > 0$ er det naturlig å integrere y fra 1 til positive verdier av y, og dermed er $|y| = y$. Ved på denne måten å holde oss på «riktig» side av singulariteten kan vi få inn initialbetingelsen i integrasjonsgrensene som følger,

$$\ln y(x) = [\ln s]_1^{y(x)} = \int_1^{y(x)} \frac{ds}{s} = \int_0^x te^{-t}\,dt = [-(1+x)e^{-x}]_0^x = 1-(x+1)e^{-x}.$$

Dermed er løsningen

$$y(x) = e^{1-(x+1)e^{-x}}.$$

Her kunne vi selvsagt også integrert ubestemt først, og deretter brukt $y(0) = 1$ til å bestemme konstanten.

Vi kan sjekke at denne løser den originale integrallikningen: vi har $(1-(t+1)e^{-t})' = te^{-t}$, og dermed er

$$1 + \int_0^x e^{1-(t+1)e^{-t}} te^{-t}\,dt = 1 + \int_0^x \left(e^{1-(t+1)e^{-t}}\right)'\,dt = 1 + e^{1-(x+1)e^{-x}} - 1 = y(x).$$

$\boxed{7}$ Fra, for eksempel, forholdstesten ser vi at potensrekka

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^n$$

konvergerer for alle x, så vi kan fritt manipulere koeffisientene. Merk da at

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}x^n + e^x = x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + e^x = xe^x + e^x.$$

Vi verifiserer at $y(x) = (x+1)e^x$ løser differensiallikningen: $y'(x) = e^x + (x+1)e^x = e^x + y(x)$, og dermed er $y' - y = e^x$.

$\boxed{8}$ Avstanden fra observatøren til utskytningsrampa er 3 kilometer, og vinkelen θ (radianer) mellom horisonten og raketten vil endre seg med tida, $\theta = \theta(t)$, der t er målt i minutter. Ifølge observatøren er denne endringen konstant, nemlig $\theta'(t) \equiv 1.5$ (radianer per minutt). Videre, siden raketten skytes rett oppover har vi for alle t identiteten $h(t) = 3\tan(\theta(t))$, der h er høyden over bakken målt i kilometer. Derivasjon og kjerneregelen gir da

$$h'(t) = (3\tan(\theta(t)))' = 3\left(1+\tan^2\theta(t)\right)\theta'(t).$$

Når $h = 3$ har vi at $\tan\theta = 1$, så ved å sette inn for alle ukjente får vi

$$h'\big|_{h=3} = 3(1+1)1.5 = 9.$$

På dette tidspunktet stiger altså raketten 9 kilometer i minuttet.

$\boxed{9}$ La oss velge $\mu > 1$ og definere $f(x) = (1+x)^\mu$, som vi observerer at er strengt voksende for $x > 0$ siden $f'(x) = \mu(x+1)^{\mu-1} > \mu > 1$ for $x > 0$. Videre er $f'(x)$ kontinuerlig for alle $x \geqslant -1$, og vi kan dermed bruke sekantsetningen på intervallet $[0,x]$. Altså, for en $c \in (0,x)$ har vi

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(c) > \mu,$$

der vi har brukt at $f'(x) > \mu$ for $x > 0$. Da følger det direkte for $\mu > 1$ og $x > 0$ at

$$(1+x)^\mu > 1 + \mu x.$$

10 Siden kurvene som definerer rotasjonslegemet er på forma $y = f(x)$ og $y = g(x)$, og vi skal rotere om $x = c$ er det mest hensiktsmessig å bruke sylinderskallmetoden her. Vi noterer oss fra figuren at $c < 0 < a < b$. Høyden til sylinderskallet som går gjennom $x \in [a, b]$ er $g(x) - f(x)$, og den tilhørende radien er $|x - c| = x - c$. Da følger det fra sylinderskallmetoden at volumet V av omdreiingslegemet er

$$V = 2\pi \int_a^b (x - c)(g(x) - f(x))\, dx.$$

11 Siden vi er gitt et integral med «ferdigoppspalta» brøker kan det være greit å evaluere det uegentlige integralet. Vi har

$$\int \frac{2x}{x^2 + k}\, dx = \ln|x^2 + k| + C \quad \text{og} \quad \int \frac{3k}{x + 2}\, dx = 3k \ln|x + 2| + C = \ln|x + 2|^{3k} + C.$$

La oss først anta $k > -1$ for å unngå singulariteter inni intervallet $(1, R)$ for $R \gg 1$, da har vi nemlig $x^2 + k \geqslant 1 + k > 0$. Det uegentlige integralet blir da

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty} \int_1^R \left(\frac{2x}{x^2 + k} - \frac{3k}{x + 2}\right) dx &= \lim_{R\to\infty} \left(\left[\ln(x^2 + k)\right]_1^R - \left[\ln\left((x + 2)^{3k}\right)\right]_1^R\right) \\
&= \lim_{R\to\infty} \left(\ln(R^2 + k) - \ln(1 + k) - \ln\left((R + 2)^{3k}\right) + \ln\left(3^{3k}\right)\right) \\
&= \lim_{R\to\infty} \ln\left(\frac{R^2 + k}{(R + 2)^{3k}}\right) + \ln\left(\frac{3^{3k}}{1 + k}\right).
\end{aligned}$$

Merk at

$$\lim_{R\to\infty} \frac{R^2 + k}{(R + 2)^{3k}} = \lim_{R\to\infty} \frac{\left(\frac{R}{R+2}\right)^2 + \frac{k}{(R+2)^2}}{(R + 2)^{3k-2}} = \begin{cases} 0, & k > \frac{2}{3}, \\ 1, & k = \frac{2}{3}, \\ \infty, & k < \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Siden $\lim_{a\to 0+} \ln a = -\infty$ og $\lim_{b\to\infty} \ln b = \infty$, følger det at den eneste måten å få et endelig tall på her, er når $k = \frac{2}{3}$. Verdien av integralet blir i dette tilfellet

$$\ln 1 + \ln\left(\frac{3^2}{1 + \frac{2}{3}}\right) = \ln\left(\frac{27}{5}\right).$$

Siden det var oppgitt at integralet kun konvergerer for én bestemt verdi av k trenger vi ikke sjekke $k \leqslant -1$. Uansett ville man hatt singulariteten som oppstår for $R \to \infty$ når $k < \frac{2}{3}$ i dette tilfellet, og denne ville gitt et divergent integral.

En alternativ måte å løse oppgava på ville vært å sette på felles brøkstrek og sammenlikne integralet med p-integraler, $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\, dx$.