TMA4100 Matematikk 1
Løsningsforslag

Eksamen 8. desember 2020

Dette løsningsforslaget svarer til den kombinasjonen av oppgaver for eksamensoppgavene som er lagt ut.

1 Følgende påstander er **feil**:

- Rekken
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$
er absolutt konvergent.

  Begrunnelse: Denne rekken er *betinget konvergent* og ikke *absolutt konvergent*. Legg merke til at
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$
som er den harmoniske rekke som vi vet at divergerer ved for eksempel integraltesten. La $a_n = (-1)^n/n$. Siden $a_n a_{n+1} < 0$ og $|a_{n+1}| = 1/(n+1) \leq 1/n = |a_n|$ for alle n, samt at $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ gir test for alternerende rekker at
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$
konvergerer. Og da den ikke kan være absolutt konvergent står vi igjen med at den må være betinget konvergent.

- Anta at $f(x)$ er en kontinuerlig funksjon som er definert på det lukkede intetvallet $[a,b]$, der $f(x) \geq 0$ for alle $x \in [a,b]$. Da angir integralet
$$2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$$
volumet av omdreiningslegemet som oppstår når vi dreier området i xy-planet avgrenset av grafen til $y = f(x)$, x-aksen, og linjene $x = a$ og $x = b$ om x-aksen.

  Begrunnelse: Integralet
$$2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$$
angir volumet av omdreiningslegemet som oppstår når vi dreier området i xy-planet avgrenset av grafen til $y = f(x)$, x-aksen, og linjene $x = a$ og $x = b$ om y-aksen (og altså ikke om x-aksen).

Følgende påstander er **riktige**:

- En kontinuerlig funksjon $f(x)$ som er definert på et lukket intervall $[a,b]$, og som har egenskapen at
$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$
for alle $x_1, x_2 \in [a,b]$, må nødvendigvis være strengt voksende eller strengt avtagende.

  Begrunnelse: Dette ble gjennomgått i interaktiv forelesning (oppgave U) i uke 38.

- En følge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ som består av reelle tall a_n, der $a_n \leq a_{n+1}$ for alle $n \geq 1$ og hvor $a_n \leq 17$ for alle $n \geq 1$, vil konvergere.

  Begrunnelse: Dette følger av kompletthetsegenskapen for de reelle tall, se side 505 i læreboken. Følgen er oppad begrenset av 17 og den er voksende. Da må den konvergere.

$\boxed{2}$ Følgende påstand er **riktig**:

- Det uegentlige integralet
$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2x+x^4}}\,dx$$
  er et uegentlig integral av type 1 og 2.

  Begrunnelse: Integralet er et uegentlig integral av type 1 siden vi integerer over et ubegrenset område, nemlig $[0, \infty)$. Det er også et uegentlig integral av type 2 ettersom
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+x^4}}$$
  ikke er kontinuerlig i $x = 0$ ($f(x)$ er ubegrenset når $x \to 0$).

Følgende påstander er **feil**:

- Gitt at $f(x) = \cos x$, der x er målt i grader, så er $f'(x) = -\sin x$.

  Begrunnelse: Dersom $f(x) = \cos x$, der x er mål i grader, så vil
$$f'(x) = -\frac{\pi}{180}\sin x$$
  for x målt i grader.

- $\dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, \qquad -1 < x < 1$

  Begrunnelse: Ettersom
$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$
  holder for alle $t \in (-1,1)$, så får vi for $t = -x^2$ at
$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$
  for $x \in (-1,1)$.

- Gitt at
$$F(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^3}\,dt,$$
  så er
$$F'(x) = \sqrt{1+x^5}.$$

  Begrunnelse: Analysens fundamentalteorem og kjerneregelen gir at
$$F'(x) = 2x\sqrt{1+(x^2)^3} = 2x\sqrt{1+x^6}.$$

3 Paringen er som følger:

	$y' + x^2y = x^2, y(0) = 0$	$y' - x^2y = -x^2, y(0) = 0$	$y' - x^2y = x^2, y(0) = 0$	$y' + x^2y = -x^2, y(0) = 0$
$y(x) = 1 - e^{-x^3/3}$	✓	-	-	-
$y(x) = e^{-x^3/3} - 1$	-	-	-	✓
$y(x) = 1 - e^{x^3/3}$	-	✓	-	-
$y(x) = e^{x^3/3} - 1$	-	-	✓	-

Begrunnelse: La

$$y_1(x) = 1 - e^{-x^3/3}, \qquad y_2(x) = e^{-x^3/3} - 1, \qquad y_3(x) = 1 - e^{x^3/3}, \quad \text{og} \quad y_4(x) = e^{x^3/3} - 1.$$

Det gir

$$y_1'(x) = x^2e^{-x^3/3}, \qquad y_2'(x) = -x^2e^{-x^3/3}, \qquad y_3'(x) = -x^2e^{x^3/3}, \quad \text{og} \quad y_4'(x) = x^2e^{x^3/3}$$

slik at

$$\begin{aligned} &y_1'(x) + x^2y_1(x) = x^2, \qquad && y_1(0) = 0 \qquad && y_2'(x) + x^2y_2(x) = -x^2, \qquad && y_2(0) = 0 \\ &y_3'(x) - x^2y_3(x) = -x^2, && y_3(0) = 0 && y_4'(x) - x^2y_4(x) = x^2, && y_4(0) = 0. \end{aligned}$$

4 Implisitt derivasjon med hensyn på x gir

$$2x + 2yy' + 2y^3 + 6xy^2y' = 1.$$

Innsatt for $(x, y) = (0, 1)$ gir det

$$2y'(1) + 2 = 1$$

slik at $y'(1) = -1/2$. Altså er stigningstallet til tangentlinjen til kurven $y = y(x)$ i punktet $(x, y) = (0, 1)$ lik $-1/2$.

5 Det er klart at $g(x)$ er kontinuerlig for alle $x \neq 1$. For at $g(x)$ skal være kontinuerlig i $x = 1$ må

$$\lim_{x\to 1} g(x) = g(1).$$

Siden $g(1)$ er definert til å være lik $f(0)$ betyr det at

$$\lim_{x\to 1} g(x) = f(0)$$

for at $g(x)$ skal være kontinuerlig i $x = 1$.

Siden

$$\frac{1}{x-1}\int_0^{x-1} f(t)\,dt$$

er et ubestemt uttrykk av typen «0/0» i $x = 1$, har vi ved L'Hôpitals regel og analysens fundamentalteorem at

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}\int_0^{x-1} f(t)\,dt = \lim_{x\to 1} \frac{f(x-1)}{1} = f(0),$$

der den siste likheten følger av at sammensetningen $f(x-1)$ mellom to kontinuerlige funksjoner, $x - 1$ og $f(x)$, også er kontinuerlig.

Altså er $g(x)$ kontinuerlig i $x = 1$, og da vi vet fra tidligere at den er kontinuerlig for alle $x \neq 1$ kan vi slutte at $g(x)$ er kontinuerlig.

6 Siden $f'(x) = -(1 + 8x^8)e^{x^8} < 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$ må $f(x)$ være en strengt avtagende funksjon og dermed også injektiv. Altså har $f(x)$ en invers funksjon, $f^{-1}(x)$.

Fra $f(0) = 2$ kan vi slutte at $f^{-1}(2) = 0$. Innsatt for $x = -2$ i

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

får vi

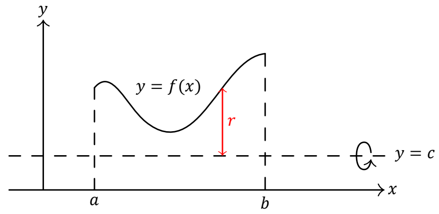
$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} = \frac{1}{f'(0)} = -1.$$

$\boxed{7}$ Arealet av omdreiningsflaten vi får når vi dreier grafen til $y = f(x)$ fra $x = a$ til $x = b$ om linjen $y = c$, er gitt ved

$$S = 2\pi \int_{x=a}^{x=b} r\, ds,$$

der $r = f(x) - c$ og $ds = \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$. Det vil si,

$$S = 2\pi \int_{x=a}^{x=b} r\, ds = 2\pi \int_a^b (f(x) - c)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$



$\boxed{8}$ Siden

$$\begin{aligned}
g(x) &= \int_0^{x^2} f(t)\, dt = \int_0^{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} 4(n+1)t^{2n+1}\, dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 4(n+1) \int_0^{x^2} t^{2n+1}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} 4(n+1) \left[\frac{1}{2n+2} t^{2n+2} \right]_0^{x^2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 4(n+1) \frac{x^{2(2n+2)}}{2(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} 2x^{4n+4} \\
&= 2(x^4 + x^8 + x^{12} + \cdots)
\end{aligned}$$

for $-1 < x < 1$, har vi at taylorrekken til $g(x)$ om $x = 0$ er gitt ved

$$g(x) = 2(x^4 + x^8 + x^{12} + \cdots) = \sum_{n=0}^{\infty} 2x^{4n+4}$$

for $-1 < x < 1$.

$\boxed{9}$ Merete slutter, feilaktig, at siden

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \left(2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

ikke eksisterer, så følger det fra L'Hôpitals regel at

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

heller ikke eksisterer.

L'Hôpitals regel sier *ingenting* om at

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

ikke eksisterer, gitt at

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ikke eksisterer. Det L'Hôpitals regel sier er at dersom

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

eksisterer (vi kan også tillate at den er lik ∞ eller $-\infty$), så eksisterer også

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

og at

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

I vårt tilfelle er

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Siden

$$\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le 1$$

for alle $x \neq 0$, følger det at

$$-|x| \le x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \le |x|$$

for alle $x \neq 0$. Og da

$$\lim_{x\to 0} \pm|x| = 0$$

gir skviseregelen at

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

$\boxed{10}$ Vannmengden $V(t)$ må tilfredsstille differensialligningen

$$\frac{dV}{dt} = 50 - \frac{V}{100\,000}$$

ettersom det renner konstant inn 50 m^3 vann per sekund og det renner ut $V/100\,000$ m^3 per sekund.

Når demningen er tom så er $V = 0$. La så $V(0) = 0$. Det gir initialverdiproblemet

$$\frac{dV}{dt} = 50 - \frac{V}{100\,000}, \qquad V(0) = 0.$$

Differensialligningen er både separabel og lineær. Løsning ved separasjon av variabler gir

$$\begin{aligned}\int \frac{dV}{50 - V/100\,000} &= -100\,000 \ln\left|50 - \frac{V}{100\,000}\right| \\ &= \int dt = t + C,\end{aligned}$$

det vil si,

$$\ln\left|50 - \frac{V}{100\,000}\right| = -\frac{t}{100\,000} + \frac{C}{100\,000}.$$

Fra dette får vi at

$$50 - \frac{V(t)}{100\,000} = Ke^{-t/100\,000}, \qquad K = \pm e^{C/100\,000}.$$

Ved å utnytte at $V(0) = 0$ finner vi at $K = 50$. Dermed er

$$V(t) = 5\,000\,000(1 - e^{-t/100\,000}).$$

Vi ønsker å finne t slik at $V(t) = 2\,500\,000$. Fra

$$2\,500\,000 = 5\,000\,000(1 - e^{-t/100\,000})$$

får vi at

$$e^{-t/100\,000} = \frac{1}{2}$$

som gir at

$$t = -100\,000 \ln\frac{1}{2} = 100\,000 \ln 2.$$

Altså er demningen halvfull etter $t = 100\,000 \ln 2 \approx 69315$ sekunder.

$\boxed{11}$ Siden $a_1 = 10 > 0$ og a_2 er summen av to positve ledd, må $a_2 > 0$. Videre så vil $a_n > 0$ for alle n. Fra

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{2a_n} = \frac{a_n^2 + 1}{2a_n}$$

får vi at $a_{n+1} \geq 1$ hvis og bare hvis $a_n^2 + 1 \geq 2a_n$, det vil si, dersom $a_n^2 - 2a_n + 1 = (a_n - 1)^2 \geq 0$. Det igjen gir at $a_n \geq 1$. Dermed er følgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nedad begrenset av 1 fordi $a_1 = 10 > 1$.

Fra $a_n \geq 1$ for alle n følger det at $a_n^2 \geq 1$ for alle n, som igjen gir at $a_n^2 + 1 \leq 2a_n^2$. Dermed er

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{2a_n} = \frac{a_n^2 + 1}{2a_n} \leq \frac{2a_n^2}{2a_n} = a_n$$

for alle n. Altså er følgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ avtagende.

Da følgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er både avtagende og nedad begrenset (av 1) så må den konvergere ved kompletthetsegenskapen for de reelle tall.

Anta at

$$\lim_{n\to\infty} a_n = r.$$

Da er

$$r = \frac{r}{2} + \frac{1}{2r} = \frac{r^2 + 1}{2r}$$

som gir at

$$2r^2 = r^2 + 1,$$

det vil si, $r^2 = 1$. Siden følgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ bare består av positive ledd må $r = 1$. Altså er

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$