TMA4100 Matematikk 1
Løsningsforslag

Eksamen 8. august 2019

1 Vi ser først etter lokale ekstremalpunkter. I vårt tilfelle er

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$$

slik at $f'(x) = 0$ når $x = 0$ eller $x = -2$. Legg merke til at $f(0) = 1$ og $f(-2) = 5$. Videre så må vi se på verdiene til f i endepunktene, det vil si, $f(-3) = 1$ og $f(3) = 55$.

Altså er minste og største verdi for f på intervallet $[-3, 3]$ lik henholdsvis 1 og 55.

2 **i)** Legg merke til at

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)}$$

Delbrøkoppspalting gir at

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right).$$

Dermed er

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^2-4}\,dx &= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{x-2}\,dx - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{x+2}\,dx \\ &= \frac{1}{4}\left[\ln|x-2|\right]_0^1 - \frac{1}{4}\left[\ln|x+2|\right]_0^1 = -\frac{1}{4}\ln 3.\end{aligned}$$

ii) La $u = \sin x$ slik at $du = \cos x\,dx$. Videre så er $\sin 0 = 0$ og $\sin \pi/2 = 1$ slik at

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 4}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{u^2-4}\,du = -\frac{1}{4}\ln 3.$$

3 Siden $|f^{(4)}(x)| \leqslant 1$ for alle $x \in [1,2]$ gir feilestimatet for Simpsons metode at

$$\left|\int_1^2 f(x)\,dx - S_{2n}\right| \leqslant \frac{1}{180(2n)^4} = \frac{1}{2880n^4}.$$

For at vår tilnærming skal være innenfor den oppgitte feilmarginen (10^{-9}) må $2880n^4 > 10^9$ som medfører at $n \geqslant 25$. Altså vil $n \geqslant 25$ sikre at feilen til tilnærmingen S_{2n} er garantert mindre enn 10^{-9}.

4 Legg merke til at $(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$. Dermed er

$$\begin{aligned}\int_1^4 [f(x)g'(x) + f'(x)g(x)]\,dx &= \int_1^4 (fg)'(x)\,dx = [(fg)(x)]_1^4 \\ &= f(4)g(4) - f(1)g(1) = (\ln 4)7 - (\ln 1)g(1) \\ &= 7\ln 4.\end{aligned}$$

5 I vårt tilfelle er $p(x) = 4x^3$ slik at

$$\mu(x) = \int p(x)\,dx = x^4.$$

Alle løsninger av den gitte differensialligningen er på formen

$$y(x) = e^{-\mu(x)}\int e^{\mu(x)}p(x)\,dx = e^{-x^4}\int e^{-x^4}x^3\,dx.$$

Ved å la $v = x^4$ får vi at

$$\int e^{x^4} x^3\,dx = \frac{1}{4}\int e^v\,dv = \frac{1}{4}e^v + C = \frac{1}{4}e^{x^4} + C.$$

Dermed er alle løsninger av den gitte differensialligningen på formen

$$y(x) = e^{-x^4}\left(\frac{1}{4}e^{x^4} + C\right) = \frac{1}{4} + Ce^{-x^4}.$$

Fra $y(0) = 1$ får vi at $C = 3/4$ slik at den spesielle løsningen er gitt ved

$$y(x) = \frac{1}{4}\left(1 + 3e^{-x^4}\right).$$

6 Vi bruker implisitt derivasjon og får

$$3x^2 + 6xy + 3x^2\frac{dy}{dx} + y^2 + 2xy\frac{dy}{dx} = 0.$$

Når $x = y = 1$ gir det at

$$3 + 6 + 3\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} + 1 + 2\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 0,$$

det vil si

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = -2.$$

Altså er ligningen til tangenten til kurven i punktet $(1,1)$ gitt ved

$$y - 1 = -2(x-1)$$

det vil si, $y = 3 - 2x$.

7 **i)** Siden

$$0 < \frac{n}{\sqrt{n^5}+1} < \frac{n}{\sqrt{n^5}} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

holder for alle $n \geqslant 1$ og

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$$

er en p-rekke med $p = 3/2 > 1$ som dermed konvergerer, gir sammenligningstesten at

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^5}+1}$$

konvergerer.

ii) Vi bruker rottesten,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}\frac{(x+2)^n}{3^n}\right|^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1/n}}\frac{|x+2|}{3} = \frac{|x+2|}{3}$$

og

$$\frac{|x+2|}{3} < 1 \quad \text{når} \quad |x+2| < 3$$

det vil si, $-3 < x + 2 < 3$ som er det samme som at $-5 < x < 1$. Altså konvergerer summen for $x \in (-5, 1)$.

Vi må også teste for konvergens i endepunktene. For $x = 1$ er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{(x+2)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

som vi vet divergerer, og når $x = -5$ så er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{(x+2)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

som vi vet at konvergerer.

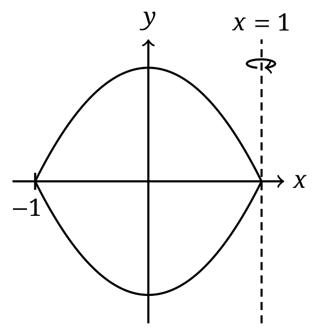
Dermed konvergerer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{(x+2)^n}{3^n}$$

for $x \in [-5, 1)$.

8 De to kurvene skjærer hverandre når $1 - x^2 = x^2 - 1$, det vil si, når $x = \pm 1$.

Volumet V av legemet som fremstår ved å dreie området mellom de to grafene om linjen $x = 1$ er så gitt ved



$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{-1}^{1} (1-x)(1-x^2-(x^2-1))\,dx \\ &= 4\pi \int_{-1}^{1} (1-x)(1-x^2)\,dx \\ &= 4\pi \int_{-1}^{1} (1-x-x^2+x^3)\,dx \\ &= \frac{16\pi}{3}. \end{aligned}$$

9 **i)** For å finne taylorrekken til $g(x) = e^{x-1}$ om $x = 1$, lar vi $u = x - 1$ og ser på taylorrekken til $g(u) = e^u$ om $u = 0$, det vil si,

$$e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$$

som konvergerer for alle u.

Altså er taylorrekken til $g(x) = e^{x-1}$ om $x = 1$ gitt ved

$$\begin{aligned} e^{x-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!} \\ &= 1 + (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!} \\ &= x + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Dermed er

$$\frac{e^{x-1} - x}{(x-1)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}(x-1) + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(x-1)^{n-2}}{n!}.$$

Siden

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{2} = f(1)$$

er kontinuerlig i $x = 1$.

ii) Fra definisjonen av den deriverte har vi at

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - 1/2}{h} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - 1/2}{x-1}.$$

Siden

$$f(x) - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}(x-1) + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(x-1)^{n-2}}{n!}$$

for $x \neq 1$, og

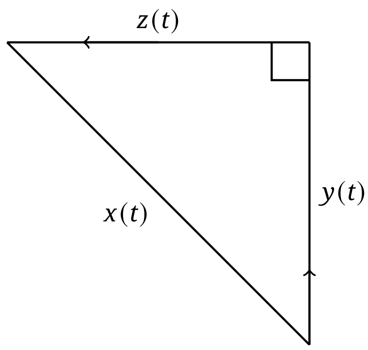
$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - 1/2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \left[\frac{1}{6} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(x-1)^{n-3}}{n!} \right] = \frac{1}{6}.$$

Altså er f deriverbar i $x = 1$ og $f'(1) = 1/6$.

(Oppgaven kan også løses ved bruk av l'Hôpitals regel.)

10 La $z(t)$ være avstanden mellom banken og Egon, og la avstanden mellom Pelle og banken være $y(t)$.

Siden dette er en rettvinklet trekant vet vi at $x^2 = z^2 + y^2$ slik at når $z = 60$ og $y = 45$ så er $x = 75$ ved dette tidspunktet.



Derivasjon av $x^2 = z^2 + y^2$ med hensyn på t gir at

$$2x\frac{dx}{dt} = 2z\frac{dz}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

slik at

$$75\frac{dx}{dt} = 60\frac{dz}{dt} + 45\frac{dy}{dt} = 60 \cdot 12 + 45 \cdot (-11).$$

(Her er $dy/dt = -11$ siden Pelle løper mot banken.)

Altså er

$$\frac{dx}{dt} = 3.$$

Det vil si at endringsraten til x når Egon er 60 meter fra banken og Pelle er 45 meter fra banken er 3 m/s.