TMA4100 Matematikk 1
Løsningsforslag

Eksamen 4. desember 2019

1 La $f(x) = x^5 - 2x - 3e^x/2$ slik at $f'(x) = 5x^4 - 2 - 3e^x/2$. Newtons metode gir så at

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^5 - 2x_n - \frac{3}{2}e^{x_n}}{5x_n^4 - 2 - \frac{3}{2}e^{x_n}}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

La så $x_0 = 0$. Da er

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{x_0^5 - 2x_0 - \frac{3}{2}e^{x_0}}{5x_0^4 - 2 - \frac{3}{2}e^{x_0}} = -\frac{\frac{3}{2}}{2 + \frac{3}{2}} = -\frac{3}{7} \approx -0.43 \\ x_2 &= x_1 - \frac{x_1^5 - 2x_1 - \frac{3}{2}e^{x_1}}{5x_1^4 - 2 - \frac{3}{2}e^{x_1}} \approx -0.48 \\ x_3 &= x_2 - \frac{x_2^5 - 2x_2 - \frac{3}{2}e^{x_2}}{5x_2^4 - 2 - \frac{3}{2}e^{x_2}} \approx -0.48. \end{aligned}$$

Det ser dermed ut til at løsningen med to siffers nøyaktighet er -0.48. Det vil si, vi gjetter på at løsningen ligger i intervallet $(-0.485, -0.475]$. Siden $f(-0.475) \approx -0.007 < 0$ og $f(-0.485) \approx 0.020 > 0$, ser vi at dette er tilfellet. Dermed er løsniningen til $f(x) = 0$ med to siffers nøyaktighet lik -0.48.

2 La $t = x^2 + 1$ slik at $t - 1 = x^2$ og $dt/dx = 2x$. Dermed er

$$\int 2x^3 \sin(x^2 + 1)\, dx = \int (t - 1)\sin(t)\, dt.$$

Delvis integrasjon med $u = t - 1$ og $v' = \sin(t)$ gir så at

$$\begin{aligned} \int (t-1)\sin(t)\, dt &= -(t-1)\cos t + \int \cos t\, dt \\ &= \sin t - (t-1)\cos t + C \\ &= \sin(x^2+1) - x^2\cos(x^2+1) + C. \end{aligned}$$

3 Volumet av legemet er gitt ved

$$V = x^2 y.$$

Derivasjon med hensyn på t gir så at

$$\frac{dV}{dt} = 2xy\frac{dx}{dt} + x^2\frac{dy}{dt} = x\left(2y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt}\right).$$

Fra oppgaveteksten vet vi at $dV/dt = 0$ for alle t, og når $x = 30$ og $y = 20$ så er $dy/dt = -2$. Dermed er

$$0 = 30\left(40\frac{dx}{dt} - 60\right)$$

som igjen gir at

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3}{2}\ \text{(cm/min)}.$$

$\boxed{4}$ Siden

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}(\arcsin(x)+2)} > 0$$

for alle $-1 < x < 1$ må $f(x)$ være en strengt voksende funksjon på intervallet $[-1,1]$, som igjen tilsier at den er injektiv og at den dermed har en invers. Legg merke til at

$$V_f = [\ln(\arcsin(-1)+2), \ln(\arcsin(1)+2)] = \left[\ln\left(2-\frac{\pi}{2}\right), \ln\left(2+\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

For å finne et uttrykk for den inverse funksjonen, $f^{-1}(x)$, ser vi på $f(y) = x$ og så løser for y som funksjon av x. Det vil si,

$$f(y) = \ln(\arcsin(y)+2) = x$$

som gir at

$$\arcsin(y) + 2 = e^x.$$

Dermed er

$$y = \sin(e^x - 2).$$

Altså er $f^{-1}(x) = \sin(e^x - 2)$ for $x \in D_{f^{-1}} = V_f$.

$\boxed{5}$ I vårt tilfelle er

$$f'(x) = \frac{e^x(1-x^2+2x)}{(1-x^2)^2}$$

og

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{e^x\left((1-x^2+2x-2x+2)(1-x^2)^2 + 4x(1-x^2)(1-x^2+2x)\right)}{(1-x^2)^4} \\ &= \frac{e^x\left((3-x^2)(1-x^2) + 4x(1-x^2+2x)\right)}{(1-x^2)^3} \\ &= \frac{e^x(x^4-4x^3+4x^2+4x+3)}{(1-x^2)^3} \end{aligned}$$

slik at taylorpolynomet av grad 2 om $a = 0$ til $f(x)$ er gitt ved

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 + x + \frac{3}{2}x^2.$$

Taylors formel gir i vårt tilfelle at

$$E_2(x) = f(x) - P_2(x) = \frac{f'''(s)}{3!}x^3,$$

der s ligger mellom 0 og x. Siden $|f'''(x)| \leq 131$ for alle $x \in [-1/2, 1/2]$ er

$$|E_2(x)| \leq \frac{131}{3!}|x|^3 = \frac{131}{6}|x|^3.$$

For at $131|x|^3/6 \leq 10^{-6}$ må $|x|^3 \leq 10^{-6}(6/131)$. Det vil si, dersom

$$|x| \leq 10^{-2}\left(\frac{6}{131}\right)^{1/3} \approx 0.0036$$

så er $|E_2(x)| = |f(x) - P_2(x)|$ garantert mindre enn 10^{-6}.

6 I vårt tilfelle er

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^{1/3}} = \lim_{b\to 2-}\int_0^b \frac{dx}{(x-2)^{1/3}} + \lim_{a\to 2+}\int_a^3 \frac{dx}{(x-2)^{1/3}}$$

og for at integralet på venstre side skal konvergere må begge integralene på høyre side konvergere. Siden både

$$\lim_{b\to 2-}\int_0^b \frac{dx}{(x-2)^{1/3}} = \lim_{b\to 2-}\left[\frac{3}{2}(x-2)^{2/3}\right]_0^b = -\frac{3}{2}2^{2/3}$$

og

$$\lim_{a\to 2+}\int_a^3 \frac{dx}{(x-2)^{1/3}} = \lim_{a\to 2+}\left[\frac{3}{2}(x-2)^{2/3}\right]_a^3 = \frac{3}{2}$$

konvergerer, har vi at

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^{1/3}}$$

konvergerer, der

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^{1/3}} = \frac{3}{2}\left(1-2^{2/3}\right).$$

7 La

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$$

slik at

$$f'(x) = x^2 - \frac{1}{4x^2} = \frac{4x^4-1}{4x^2}.$$

Buelengden til kurven gitt som grafen til $y = f(x)$ for $1 \le x \le 2$ er så gitt ved

$$\begin{aligned} s &= \int_1^2 \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = \int_1^2 \sqrt{1+\frac{(4x^4-1)^2}{16x^4}}\,dx = \int_1^2 \frac{\sqrt{16x^4+(4x^4-1)^2}}{4x^2}\,dx \\ &= \int_1^2 \frac{\sqrt{16x^8+8x^4+1}}{4x^2}\,dx = \int_1^2 \frac{\sqrt{(4x^4+1)^2}}{4x^2}\,dx = \int_1^2 \frac{4x^4+1}{4x^2}\,dx \\ &= \int_1^2 \left(x^2+\frac{1}{4x^2}\right)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4x}\right]_1^2 = \frac{1}{3}(8-1) - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{59}{24}. \end{aligned}$$

8 Initialverdiproblemet kan skrives som

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x+1} = x, \qquad y(0) = 4.$$

Differensialligningen er lineær med $p(x) = -1/(x+1)$ og $q(x) = x$. Det vil si,

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int(-1/(x+1))\,dx}y\right] = e^{\int(-1/(x+1))\,dx}x = \frac{x}{x+1}$$

slik at

$$e^{\int(-1/(x+1))\,dx}y(x) = \frac{y(x)}{x+1} = \int \frac{x}{x+1}\,dx = \int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx = x - \ln(x+1) + C.$$

Altså er

$$y(x) = (x+1)\left(x - \ln(x+1) + C\right).$$

Fra $y(0) = 4$ får vi at $C = 4$. Dermed er

$$y(x) = (x+1)\left(x - \ln(x+1) + 4\right).$$

9 (i) Siden

$$\left|\frac{\sin\left(\frac{n^2\pi}{2}\right)}{n^2+1}\right| \leq \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$$

holder for alle $n \geq 1$ og $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ er en p-rekke med $p = 2 > 1$ som dermed konvergerer, gir sammenligningstesten at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n^2\pi}{2}\right)}{n^2+1}$$

er absolutt konvergent.

(ii) Siden

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}e^n}{n^3}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{3n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{6n} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{6} = \infty$$

divergerer rekken, da leddene ikke går mot 0 når $n \to \infty$.

(iii) La $a_n = (-1)^n/(\ln(n)+1)$. Siden $\ln(n) < n$ for alle $n \geq 1$ har vi at

$$|a_n| = \frac{1}{\ln(n)+1} > \frac{1}{n+1}$$

for alle $n \geq 1$. Ettersom rekken $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n+1) = \sum_{k=2}^{\infty} 1/k$ divergerer (det er den harmoniske rekken ($p = 1$) som vi vet er divergent ved for eksempel integraltesten) gir sammenligningstesten at $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergerer.
Siden $\ln(n+1)+1 > \ln(n)+1$ for alle $n \geq 1$, må $|a_{n+1}| = 1/(\ln(n+1)+1) < |a_n| = 1/(\ln(n)+1)$ for alle $n \geq 1$. Og da $a_n \to 0$ når $n \to \infty$, $a_n a_{n+1} < 0$ for alle $n \geq 1$ og $|a_{n+1}| < |a_n|$ for alle $n \geq 1$, gir test for alternerende rekker at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)+1}$$

konvergerer, og dermed betinget konvergent ettersom $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergerer.

10 Funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & x > 0 \\ e^x & x \leq 0 \end{cases}$$

er kontinuerlig for alle $x \neq 0$. For at funksjonen også skal være kontinuerlig i $x = 0$ må

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1.$$

Siden $g(x) = e^x$ er en kontinuerlig funksjon vet vi at

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} g(x) = g(0) = e^0 = 1.$$

Og siden $h(x) = 1/(1+x^2)$ er en rasjonal funksjon (og dermed kontinuerlig) vet vi at

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} h(x) = h(0) = 1.$$

Altså er $f(x)$ kontinuerlig for alle x.
Legg merke til at

$$\left|\frac{1}{1+x^2} - 1\right| = \left|-\frac{x^2}{1+x^2}\right| = \frac{x^2}{1+x^2} < x^2$$

for alle $|x| > 0$ (der ulikheten over fremkommer ved å utnytte at $1 < 1 + x^2$). La så $\delta = \sqrt{\epsilon}$. Da er

$$\left|\frac{1}{1+x^2} - 1\right| < \epsilon$$

når $0 < |x| < \delta = \sqrt{\epsilon}$. Altså er

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^2} = 1.$$