TMA4100 Matematikk 1
Løsningsforslag

Eksamen 13. august 2018

1 Funksjonen er opplagt kontinuerlig for $x < 1$ og $x > 1$. For at funksjonen skal være kontinuerlig i $x = 1$ må

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 1.$$

For at $\lim_{x\to 1} f(x)$ skal eksistere må $\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1+} f(x)$. Siden

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-}(1-(x+a)^2) = 1-(1+a)^2 \qquad \text{og} \qquad \lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} xe^{1-x} = 1,$$

må $(1+a)^2 = 0$ for at de to grenseverdiene skal være like. Det vil si, $a = -1$ gir at funksjonen er kontinuerlig i $x = 1$ og dermed kontinuerlig for alle $x \in \mathbb{R}$.

2 Derivasjon med hensyn på x gir at

$$f'(x) = \frac{1}{x^2-2x+2}(2x-2) = \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+1}$$

for $x > 1$. Siden $x - 1 > 0$ for $x > 1$ må $f'(x) > 0$ for alle $x > 1$. Altså er f strengt voksende for alle $x \geq 1$ (funksjonen er kontinuerlig for alle $x \geq 1$). En strengt voksende funksjon er nødvendigvis én-entydig («én-til-én») og har dermed en invers. Legg merke til at $D_f = [1, \infty)$ og $V_f = [0, \infty)$.

For å finne et uttrykk for $f^{-1}(x)$ løser vi $x = f(y)$ med hensyn på y der $x \in V_f$ og $y \in D_f$. Det vil si,

$$x = f(y) = \ln(y^2-2y+2) = \ln((y-1)^2+1),$$

som gir at

$$(y-1)^2+1 = e^x.$$

Altså er $y = 1+\sqrt{e^x-1}$ slik at

$$f^{-1}(x) = 1+\sqrt{e^x-1}, \qquad x \in V_f = D_{f^{-1}} = [0,\infty).$$

3 Derivasjon med hensyn på x gir at

$$f(x) = 1-2xe^{x^2},$$

der vi har brukt analysens fundamentalteorem. Deriverer vi en gang til får vi at

$$f'(x) = -2e^{x^2} - 4x^2e^{x^2} = -2(1+2x^2)e^{x^2}$$

slik at $f'(0) = -2$.

4 Delbrøkoppspalting gir at

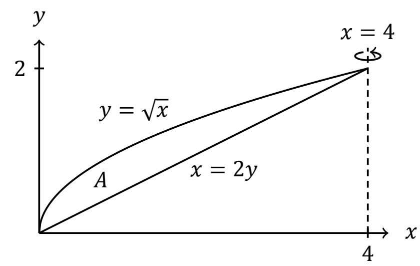
$$\frac{5x^2-2}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-2},$$

der $A = 3, B = -1$ og $C = 2$. Dermed er

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{5x^2-2}{(x+1)^2(x-2)}\,dx &= \int_0^1 \left(\frac{3}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{x-2}\right)dx \\ &= \left[3\ln(x+1) + \frac{1}{x+1} + 2\ln|x-2|\right]_0^1 = \ln 2 - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

5 For å finne skjæringspunktene mellom $y = \sqrt{x}$ og $x = 2y$ ser vi på $\sqrt{x} = x/2$, som har løsning $x = 0$ (som medfører $y = 0$) og $x = 4$ (som medfører $y = 2$). Altså har vi skjæringspunkter i $(0, 0)$ og $(4, 2)$.

Legg merke til at $\sqrt{x} \geq x/2$ for alle $x \in [0,4]$.
Sylinderskallmetoden gir at



$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^4 (4-x)\left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right) dx \\ &= \pi \int_0^4 (8\sqrt{x} - 4x - 2x^{3/2} + x^2)\, dx \\ &= \pi \left[\frac{16}{3} x^{3/2} - 2x^2 - \frac{4}{5} x^{5/2} + \frac{1}{3} x^3 \right]_0^4 = \frac{32}{5}\pi. \end{aligned}$$

$\boxed{6}$ Dette er en geometrisk rekke der

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2|x| - 3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} r^n,$$

hvor $r = 2|x| - 3$. Dermed konvergerer rekken hvis $|2|x| - 3| < 1$ som medfører at $1 < |x| < 2$.
Siden $(2|x| - 3)^0 = 1$ er summen så gitt ved

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2|x| - 3)^n = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} (2|x| - 3)^n = -1 + \frac{1}{1 - (2|x| - 3)} = \frac{2|x| - 3}{4 - 2|x|},$$

der $1 < |x| < 2$, hvor vi har brukt at summen av en geometrisk rekke $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ er gitt ved $1/(1-r)$.

$\boxed{7}$ La $a_n = n/(1+n^2)^p$. Siden $(1+n^2)^p > n^{2p}$ for alle $n \geq 1$ når $p > 1$ følger det at

$$a_n = \frac{n}{(1+n^2)^p} < \frac{n}{n^{2p}} = \frac{1}{n^{2p-1}}$$

for alle $n \geq 1$. Ettersom $2p - 1 > 1$ for alle $p > 1$ vet vi at $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{2p-1}$ konvergerer (ved for eksempel integraltesten).
Sammenligningstesten gir så at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(1+n^2)^p}$$

konvergerer for $p > 1$.
La så $p = 1$. Siden $(1+n^2)^p = 1 + n^2 \leq 2n^2$ for alle $n \geq 1$ følger det at

$$\frac{n}{1+n^2} \geq \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n}$$

for alle $n \geq 1$. Ettersom den harmoniske rekken $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ divergerer, gir sammenligningstesten at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(1+n^2)^p}$$

divergerer for $p = 1$.

$\boxed{8}$ Derivasjon med hensyn på x av ligningen

$$y(x) = e^x + 1 - \int_0^x y(t) e^t \, dt$$

gir

$$y'(x) = e^x - y(x)e^x = (1 - y(x))e^x,$$

det vil si

$$y'(x) + e^x y(x) = e^x, \qquad (*)$$

som vi skulle vise.

Differensialligningen $(*)$ er lineær og separabel. Løsning ved separasjon av variabler gir så at

$$-\ln|1-y| = \int \frac{dy}{1-y} = \int e^x\,dx = e^x + C$$

slik at

$$1 - y(x) = Ke^{-e^x},$$

der $K = \pm e^{-C}$.

Legg merke til at

$$y(0) = e^0 + 1 - \int_0^0 y(t)e^t\,dt = 2.$$

Dermed er

$$1 - y(0) = 1 - 2 = Ke^{-e^0} = \frac{K}{e},$$

slik at $K = -e$.

Altså er

$$y(x) = 1 + e^{1-e^x}.$$

$\boxed{9}$ La $f(x) = \tan x$ for $x \in [-\pi/4, \pi/4]$ slik at

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\pi}{2n} \tan\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi i}{2n}\right)$$

er en riemannsum for f på intervallet $[-\pi/4, \pi/4]$.

Altså er

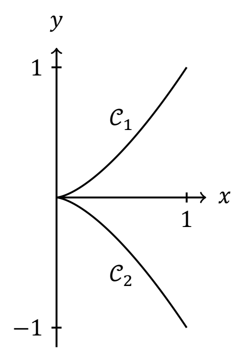
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi}{2n} \tan\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi i}{2n}\right) = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan x\,dx = 0,$$

der den siste likheten følger av symmetri.

$\boxed{10}$ La $\mathcal{C}$ være den delen av kurven $y^2 = x^3$ fra $(1,-1)$ til $(1,1)$, og la $\mathcal{C}_1$ være den delen av $\mathcal{C}$ fra $(0,0)$ til $(1,1)$ og $\mathcal{C}_2$ være den delen av $\mathcal{C}$ fra $(1,-1)$ til $(0,0)$ (se skissen under).

Symmetri gir at buelengden til $\mathcal{C}_1$ er lik buelengden til $\mathcal{C}_2$. Legg merke til at $\mathcal{C}_1$ er grafen til $y = x^{3/2}$ fra $x = 0$ til $x = 1$. La $f(x) = x^{3/2}$.

Buelengden s_1 til $\mathcal{C}_1$ er så gitt ved



$$\begin{aligned} s_1 &= \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx \\ &= \frac{8}{27}\left[\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{27}(13\sqrt{13} - 8). \end{aligned}$$

La s være buelengden til $\mathcal{C}$. Symmetri gir så at

$$s = 2s_1 = \frac{2}{27}(13\sqrt{13} - 8).$$