

- 1 Legg merke til at  $x^3 - 2x^2 + 2x = x(x^2 - 2x + 2) = x((x - 1)^2 + 1)$ . Delbrøkkoppspalting gir så at

$$\frac{3x^2 + 2}{x^3 - 2x^2 + 2x} = \frac{3x^2 + 2}{x((x - 1)^2 + 1)} = \frac{1}{x} + \frac{2x + 2}{(x - 1)^2 + 1}$$

slik at

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 + 2}{x^3 - 2x^2 + 2x} dx &= \int \left( \frac{1}{x} + \frac{2x + 2}{(x - 1)^2 + 1} \right) dx \\ &= \int \left( \frac{1}{x} + \frac{2x - 2}{(x - 1)^2 + 1} + \frac{4}{(x - 1)^2 + 1} \right) dx \\ &= \ln|x| + \ln(x^2 - 2x + 2) + 4 \arctan(x - 1) + C. \end{aligned}$$

- 2 Taylorpolynomet til  $f$  av grad 3 om  $a = 0$  er gitt ved

$$P_3(x) = \sum_{n=0}^3 \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3.$$

I vårt tilfelle er

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x}{1 + x^4} - 6\pi \cos \pi x \\ f''(x) &= \frac{2(1 + x^4) - 8x^4}{(1 + x^4)^2} + 6\pi^2 \sin \pi x = \frac{2 - 6x^4}{(1 + x^4)^2} + 6\pi^2 \sin \pi x \\ f'''(x) &= \frac{-24x^3(1 + x^4)^2 - 8x^3(2 - 6x^4)(1 + x^4)}{(1 + x^4)^4} + 6\pi^3 \cos \pi x \end{aligned}$$

slik at  $f'(0) = -6\pi$ ,  $f''(0) = 2$  og  $f'''(0) = 6\pi^3$ . Siden  $f(0) = 0$  har vi at

$$P_3(x) = x(\pi^3 x^2 + x - 6\pi).$$

- 3 a) Legg merke til at

$$x^c \ln x = \frac{\ln x}{x^{-c}}$$

er en ubestemt form av typen « $\infty/\infty$ » når  $x \rightarrow 0+$  gitt at  $c > 0$ .

L'Hôpitals regel gir så at

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^c \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{x^{-c}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^{-1}}{c x^{-c-1}} = \lim_{x \rightarrow 0+} -\frac{x^c}{c} = 0.$$

- b) Delvis integrasjon med  $u(x) = \ln x$  og  $v'(x) = x^a$  gir at

$$\int x^a \ln x dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} \ln x - \frac{1}{a+1} \int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} \left( \ln x - \frac{1}{a+1} \right) + C.$$

Dermed er

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^a \ln x dx &= \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \left[ \frac{1}{a+1} x^{a+1} \left( \ln x - \frac{1}{a+1} \right) \right]_{\alpha}^1 \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \left( -\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a+1)^2} \alpha^{a+1} \ln \alpha \right) = -\frac{1}{(a+1)^2} \end{aligned}$$

der den siste likheten følger fra grenseverdien vi fant i **a**).

Når  $a = -1$  så er

$$\int_0^1 x^{-1} \ln x \, dx = \int_{\infty}^1 u \, du = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2} u^2 \right]_{\beta}^1 = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (1 - \beta^2) = -\infty$$

der den første likheten følger ved å benytte substitusjonen  $u = \ln x$ .

Altså divergerer integralet når  $a = -1$ .

- 4) Sylinderskallmetoden gir at volumet av omdreiningslegemet er gitt ved

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_1^2 x \left( \frac{3x}{2\sqrt{x^3+3}} + 3 - 1 \right) dx = 3\pi \int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+3}} dx + 4\pi \int_1^2 x dx \\ &= \pi \int_4^{11} \frac{1}{\sqrt{u}} du + 6\pi = \pi [2\sqrt{u}]_4^{11} + 6\pi = 2\pi(1 + \sqrt{11}) \end{aligned}$$

der den tredje likheten følger ved å benytte substitusjonen  $u = x^3 + 3$ .

- 5) Dette er en første ordens lineær differensialligning med  $p(x) = 4/x$  og  $q(x) = 5e^{x^5+1} + 15$ . La  $\mu(x)$  være en antiderivert til  $p(x)$ , det vil si,

$$\mu(x) = \int p(x) \, dx = \int \frac{4}{x} \, dx = 4 \ln x = \ln x^4$$

hvor vi antar  $x > 0$ . Det gir at  $e^{\mu(x)} = e^{\ln x^4} = x^4$ , slik at

$$\frac{d}{dx} [x^4 y] = (5e^{x^5+1} + 15)x^4.$$

Integrasjon med hensyn på  $x$  gir så

$$x^4 y = \int (5e^{x^5+1} + 15)x^4 \, dx = e^{x^5+1} + 3x^5 + C$$

slik at den generelle løsningen til differensialligningen er

$$y(x) = \frac{e^{x^5+1} + 3x^5 + C}{x^4}$$

for  $x > 0$ .

Fra  $y(1) = 3$  får vi at

$$y(1) = e^2 + 3 + C = 3$$

slik at  $C = -e^2$ . Altså er løsningen til initialverdiproblemet gitt ved

$$y(x) = \frac{e^{x^5+1} + 3x^5 - e^2}{x^4}$$

for  $x > 0$ .

- 6) La  $g(x) = f(x) - x$ . Vi ønsker å vise at det eksisterer minst én  $x \in [0, 1]$  slik at  $g(x) = 0$ . Hvis  $g(0) = 0$  eller  $g(1) = 0$  er det ingenting å vise. Anta derfor at  $g(0) \neq 0$  og at  $g(1) \neq 0$ . Da følger det fra antagelsen om at  $0 \leq f(x) \leq 1$  for  $0 \leq x \leq 1$  at  $g(0) > 0$  og at  $g(1) < 0$ . Siden  $g$  er en kontinuerlig funksjon følger det fra skjæringssetningen at det eksisterer (minst én)  $c \in (0, 1)$  slik at  $g(c) = 0$ . Altså eksisterer det minst én  $x \in [0, 1]$  slik at  $g(x) = 0$ .

- 7) La  $a_n = (-1)^n / (2n + 1)$ . Siden

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} x^{n+2}|}{|a_n x^{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+3} |x| = |x|$$

gir forholdstesten at potensrekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{n+1}$$

konvergerer dersom  $\rho = |x| < 1$ . Altså er konvergensradien  $R = 1$ .

La så  $x = -1$ . Da er

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{n+1} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}.$$

La  $a_n = 1/(2n+1)$  og la  $b_n = 1/(n+1)$ . Siden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

og den harmoniske rekken  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n$  divergerer (som følger ved for eksempel integraltesten), gir grensesammenligningstesten at

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$$

divergerer.

La så  $x = 1$ . Da er

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Dette er en alternerende rekke der leddene er gitt ved  $a_n = (-1)^n/(2n+1)$ . Siden  $2n+3 > 2n+1$  for alle  $n \geq 0$  følger det at

$$|a_{n+1}| = \frac{1}{2n+3} < \frac{1}{2n+1} = |a_n|$$

for alle  $n \geq 0$ . Da vi også har at  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  følger det fra test for alternerende rekker at

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

konvergerer.

Altså konvergerer potensrekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{n+1}$$

for  $x \in (-1, 1]$ .

**8** a) Taylorrekken om  $a = 0$  til  $f(x) = e^x$  er gitt ved

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

for alle  $x \in \mathbb{R}$ . Dermed er

$$e^{-x^2/4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2/4)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1/4)^n}{n!} x^{2n}$$

for alle  $x \in \mathbb{R}$ .

b) Ved å bruke resultatet fra a) får vi at

$$I = \int_0^1 e^{-x^2/4} dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1/4)^n}{n!} x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1/4)^n}{n!} \int_0^1 x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1/4)^n}{n!(2n+1)}.$$

Altså har vi uttrykt  $I$  som en alternerende rekke. La

$$a_n = \frac{(-1/4)^n}{n!(2n+1)}$$

og observer at  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  samt at  $4^{n+1}(n+1)!(2n+3) > 4^n n!(2n+1)$  for alle  $n \geq 0$ , slik at  $|a_{n+1}| < |a_n|$  for alle  $n \geq 0$ . Test for alternerende rekker gir så at

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1/4)^n}{n!(2n+1)}$$

konvergerer.

La  $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ . Feilestimatet for alternerende rekker gir så at

$$|I - s_n| \leq |a_{n+1}| = \frac{1}{4^{n+1}(n+1)!(2n+3)}.$$

For å oppnå ønsket nøyaktig i vår tilnærming til  $I$  må  $|a_{n+1}| < 0.0005$ , det vil si,  $4^{n+1}(n+1)!(2n+3) > 2000$ . Fra tabellen

$n$	0	1	2
$\frac{1}{4^{n+1}(n+1)!(2n+3)}$	12	160	2688

ser vi at  $|a_{2+1}| = |a_3| < 0.0005$ .

Dermed er

$$s_2 = \sum_{k=0}^2 a_k = a_0 + a_1 + a_2 = 1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{160} = \frac{443}{480}$$

en tilnærming til  $I$  med feil garantert mindre enn 0.0005.