TMA4100 Matematikk 1
Løsningsforslag

Eksamen 8. august 2017

1 Legg merke til at $x^3 - 2x^2 + 2x = x(x^2 - 2x + 2) = x((x-1)^2 + 1)$. Delbrøkoppspalting gir så at

$$\frac{3x^2+2}{x^3-2x^2+2x} = \frac{3x^2+2}{x((x-1)^2+1)} = \frac{1}{x} + \frac{2x+2}{(x-1)^2+1}$$

slik at

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2+2}{x^3-2x^2+2x}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2x+2}{(x-1)^2+1}\right) dx \\ &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2x-2}{(x-1)^2+1} + \frac{4}{(x-1)^2+1}\right) dx \\ &= \ln|x| + \ln(x^2-2x+2) + 4\arctan(x-1) + C.\end{aligned}$$

2 Taylorpolynomet til f av grad 3 om $a = 0$ er gitt ved

$$P_3(x) = \sum_{n=0}^{3} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(x)x^2 + \frac{1}{3!} f'''(x)x^3.$$

I vårt tilfelle er

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{2x}{1+x^4} - 6\pi\cos\pi x \\ f''(x) &= \frac{2(1+x^4) - 8x^4}{(1+x^4)^2} + 6\pi^2 \sin\pi x = \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2} + 6\pi^2\sin\pi x \\ f'''(x) &= \frac{-24x^3(1+x^4)^2 - 8x^3(2-6x^4)(1+x^4)}{(1+x^4)^4} + 6\pi^3\cos\pi x\end{aligned}$$

slik at $f'(0) = -6\pi$, $f''(0) = 2$ og $f'''(0) = 6\pi^3$. Siden $f(0) = 0$ har vi at

$$P_3(x) = x(\pi^3x^2 + x - 6\pi).$$

3 **a)** Legg merke til at

$$x^c \ln x = \frac{\ln x}{x^{-c}}$$

er en ubestemt form av typen «∞/∞» når $x \to 0+$ gitt at $c > 0$.
L'Hôpitals regel gir så at

$$\lim_{x\to 0+} x^c \ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{x^{-c}} = \lim_{x\to 0+} -\frac{x^{-1}}{cx^{-c-1}} = \lim_{x\to 0+} -\frac{x^c}{c} = 0.$$

b) Delvis integrasjon med $u(x) = \ln x$ og $v'(x) = x^a$ gir at

$$\int x^a \ln x\,dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1}\ln x - \frac{1}{a+1}\int x^a\,dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1}\left(\ln x - \frac{1}{a+1}\right) + C.$$

Dermed er

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^a \ln x\,dx &= \lim_{\alpha\to 0+} \left[\frac{1}{a+1}x^{a+1}\left(\ln x - \frac{1}{a+1}\right)\right]_\alpha^1 \\ &= \lim_{\alpha\to 0+}\left(-\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a+1)^2}\alpha^{a+1}\ln\alpha\right) = -\frac{1}{(a+1)^2}\end{aligned}$$

der den siste likheten følger fra grenseverdien vi fant i **a)**.
Når $a = -1$ så er

$$\int_0^1 x^{-1} \ln x \, dx = \int_\infty^1 u \, du = \lim_{\beta \to \infty} \left[\frac{1}{2} u^2 \right]_\beta^1 = \lim_{\beta \to \infty} \frac{1}{2}(1 - \beta^2) = -\infty$$

der den første likheten følger ved å benytte substitusjonen $u = \ln x$.
Altså divergerer integralet når $a = -1$.

$\boxed{4}$ Sylinderskallmetoden gir at volumet av omdreiningslegemet er gitt ved

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_1^2 x \left(\frac{3x}{2\sqrt{x^3+3}} + 3 - 1 \right) dx = 3\pi \int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+3}} \, dx + 4\pi \int_1^2 x \, dx \\ &= \pi \int_4^{11} \frac{1}{\sqrt{u}} \, du + 6\pi = \pi \left[2\sqrt{u} \right]_4^{11} + 6\pi = 2\pi(1 + \sqrt{11}) \end{aligned}$$

der den tredje likheten følger ved å benytte substitusjonen $u = x^3 + 3$.

$\boxed{5}$ Dette er en første ordens lineær differensialligning med $p(x) = 4/x$ og $q(x) = 5e^{x^5+1} + 15$. La $\mu(x)$ være en antiderivert til $p(x)$, det vil si,

$$\mu(x) = \int p(x) \, dx = \int \frac{4}{x} \, dx = 4 \ln x = \ln x^4$$

hvor vi antar $x > 0$. Det gir at $e^{\mu(x)} = e^{\ln x^4} = x^4$, slik at

$$\frac{d}{dx} \left[x^4 y \right] = (5e^{x^5+1} + 15)x^4.$$

Integrasjon med hensyn på x gir så

$$x^4 y = \int (5e^{x^5+1} + 15)x^4 \, dx = e^{x^5+1} + 3x^5 + C$$

slik at den generelle løsningen til differensialligningen er

$$y(x) = \frac{e^{x^5+1} + 3x^5 + C}{x^4}$$

for $x > 0$.
Fra $y(1) = 3$ får vi at

$$y(1) = e^2 + 3 + C = 3$$

slik at $C = -e^2$. Altså er løsningen til initialverdiproblemet gitt ved

$$y(x) = \frac{e^{x^5+1} + 3x^5 - e^2}{x^4}$$

for $x > 0$.

$\boxed{6}$ La $g(x) = f(x) - x$. Vi ønsker å vise at det eksisterer minst én $x \in [0, 1]$ slik at $g(x) = 0$. Hvis $g(0) = 0$ eller $g(1) = 0$ er det ingenting å vise. Anta derfor at $g(0) \neq 0$ og at $g(1) \neq 0$. Da følger det fra antagelsen om at $0 \leq f(x) \leq 1$ for $0 \leq x \leq 1$ at $g(0) > 0$ og at $g(1) < 0$. Siden g er en kontinuerlig funksjon følger det fra skjæringssetningen at det eksisterer (minst én) $c \in (0, 1)$ slik at $g(c) = 0$. Altså eksisterer det minst én $x \in [0, 1]$ slik at $g(x) = 0$.

$\boxed{7}$ La $a_n = (-1)^n/(2n + 1)$. Siden

$$\rho = \lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1} x^{n+2}|}{|a_n x^{n+1}|} = \lim_{n \to \infty} \frac{2n + 1}{2n + 3} |x| = |x|$$

gir forholdstesten at potensrekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{n+1}$$

konvergerer dersom $\rho = |x| < 1$. Altså er konvergensradien $R = 1$.

La så $x = -1$. Da er

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{n+1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}.$$

La $a_n = 1/(2n+1)$ og la $b_n = 1/(n+1)$. Siden

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

og den harmoniske rekken $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ divergerer (som følger ved for eksempel integral-testen), gir grensesammenligningstesten at

$$-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$$

divergerer.

La så $x = 1$. Da er

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Dette er en alternerende rekke der leddene er gitt ved $a_n = (-1)^n/(2n+1)$. Siden $2n+3 > 2n+1$ for alle $n \geq 0$ følger det at

$$|a_{n+1}| = \frac{1}{2n+3} < \frac{1}{2n+1} = |a_n|$$

for alle $n \geq 0$. Da vi også har at $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ følger det fra test for alternerende rekker at

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

konvergerer.

Altså konvergerer potensrekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{n+1}$$

for $x \in (-1, 1]$.

$\boxed{8}$ **a)** Taylorrekken om $a = 0$ til $f(x) = e^x$ er gitt ved

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

for alle $x \in \mathbb{R}$. Dermed er

$$e^{-x^2/4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2/4)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1/4)^n}{n!} x^{2n}$$

for alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Buelengden til grafen til $y = F(x)$ fra $x = 0$ til $x = 1$ er gitt ved

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + F'(x)^2}\, dx.$$

Analysens fundamentalsetning gir at

$$F'(x) = \sqrt{e^{-x^2/2} - 1}$$

slik at

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + F'(x)^2}\, dx = \int_0^1 e^{-x^2/4}\, dx.$$

Siden

$$e^{-x^2/4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1/4)^n}{n!} x^{2n}$$

for alle $x \in \mathbb{R}$ har vi at

$$s = \int_0^1 e^{-x^2/4}\, dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1/4)^n}{n!} x^{2n}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1/4)^n}{n!} \int_0^1 x^{2n}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1/4)^n}{n!(2n+1)}.$$

Altså har vi uttrykt s som en alternerende rekke. La

$$a_n = \frac{(-1/4)^n}{n!(2n+1)}$$

og observer at $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ samt at $4^{n+1}(n+1)!(2n+3) > 4^n n!(2n+1)$ for alle $n \geq 0$, slik at $|a_{n+1}| < |a_n|$ for alle $n \geq 0$. Test for alternerende rekker gir så at

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1/4)^n}{n!(2n+1)}$$

konvergerer.
La $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_n$. Feilestimatet for alternerende rekker gir så at

$$|s - s_n| \leq |a_{n+1}| = \frac{1}{4^{n+1}(n+1)!(2n+3)}.$$

For å oppnå ønsket nøyaktig i vår tilnærming til s må $|a_{n+1}| < 0.0005$, det vil si, $4^{n+1}(n+1)!(2n+3) > 2000$. Fra tabellen

n	0	1	2
$4^{n+1}(n+1)!(2n+3)$	12	160	2688

ser vi at $|a_{2+1}| = |a_3| < 0.0005$.
Dermed er

$$s_2 = \sum_{k=0}^{2} a_k = a_0 + a_1 + a_2 = 1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{160} = \frac{443}{480}$$

en tilnærming til s med feil garantert mindre enn 0.0005.