TMA4100 Matematikk 1
Løsningsforslag

Eksamen 6. desember 2017

1 Implisitt derivasjon med hensyn på x gir at

$$3y^2y' + 2yy' - 5y' - 2x = 0.$$

Innsatt for $(x, y) = (1, -3)$ gir det at

$$27y'(1) - 6y'(1) - 5y'(1) - 2 = 0$$

som igjen gir at $y'(1) = 1/8$.

En ligning for tangenten er så gitt ved

$$y - (-3) = y'(1)(x - 1) = \frac{1}{8}(x - 1),$$

det vil si,

$$y = \frac{1}{8}(x - 25).$$

2 Ved å utnytte at

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + O(x^4) \quad \text{og} \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)$$

når $x \to 0$ får vi at

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(\cos x - 1)}{\sin x - x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(1 - x^2/2! + O(x^4) - 1\right)}{x - x^3/3! + O(x^5) - x} = \lim_{x\to 0} \frac{-1/2! + O(x^2)}{-1/3! + O(x^2)} = 3.$$

3 For å kunne bruke ekstremalverdisetningen (en kontinuerlig funksjon definert på et lukket intervall må ha en største og en minste verdi) må vi sjekke at funksjonen er kontinuerlig for alle $x \in [-2, 2]$. Funksjonen er opplagt kontinuerlig for $x \in [-2, 0)$ og for $x \in (0, 2]$. Siden

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \sqrt{x + 1} = 1 = f(0) \qquad \text{og} \qquad \lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} e^x(x - 1)^2 = 1 = f(0)$$

slik at

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$$

må også funksjonen være kontinuerlig i $x = 0$. Dermed har f en største og en minste verdi.

For å finne største og minste verdi må vi sjekke

- kritiske punkter: $f'(x) = 0$
- singulære punkter: $f'(x)$ eksisterer ikke
- endepunktene: $x = -2$ og $x = 2$.

For $-2 < x < 0$ er $f'(x) = e^x(x - 1)^2 + 2e^x(x - 1) = e^x(x - 1)(x + 1)$, slik at den eneste gyldige løsningen for $f'(x) = 0$ i dette tilfellet er $x = -1$. Altså er $x = -1$ et kritisk punkt.

For $0 < x < 2$ er $f'(x) = (x + 1)^{-1/2}/2$, slik at det finnes ingen løsninger for $f'(x) = 0$ i dette tilfellet.

Punktet $x = 0$ er en mulig kandidat for et kritisk punkt eller et singulært punkt. Det er imidlertid ikke nødvendig å avgjøre hva slags type punkt det er, når vi kun er interessert i største og minste verdi til f. (Det kan vises at $x = 0$ er et singulært punkt.)

Kandidatene for største og minste verdi er dermed

$$f(-2) = 9e^{-2}, \quad f(-1) = 4e^{-1}, \quad f(0) = 1 \quad \text{og} \quad f(2) = \sqrt{3}$$

og da

$$f(2) > f(-1) > f(-2) > f(0)$$

ser vi at den største verdien er $f(2) = \sqrt{3}$ og den minste verdien er $f(0) = 1$.

$\boxed{4}$ La $f(x) = \arctan x - 3e^{-x} - 1$ for $x \in \mathbb{R}$. Siden f er kontinuerlig og

$$f(0) = -4 < 0 < f(3) = \arctan 3 - 3e^{-3} - 1 \approx 0.0997$$

gir skjæringssetningen at det finnes minst ett tall $c \in (0, 3)$ slik at $f(c) = 0$.
Siden

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + 3e^{-x} > 0$$

for alle $x \in \mathbb{R}$ er f strengt voksende for alle $x \in \mathbb{R}$ og det finnes dermed nøyaktig ett tall $c = r \in \mathbb{R}$ slik at $f(r) = 0$.
Newtons metode gir i vårt tilfelle at

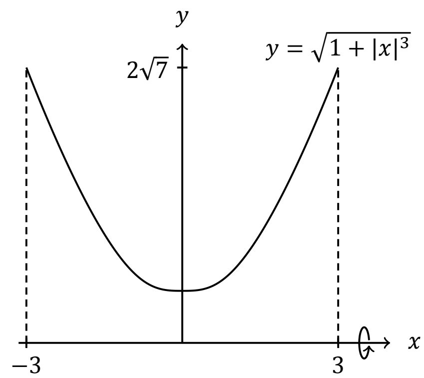
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\arctan x_n - 3e^{-x_n} - 1}{1/(1+x_n^2) + 3e^{-x_n}}$$

for $n = 0, 1, 2, \ldots$ Innsatt for $x_0 = 3$ gir dette at

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \approx 2.6002 \\ x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 2.6546. \end{aligned}$$

$\boxed{5}$ La $f(x) = \sqrt{1 + |x|^3}$ for $-3 \le x \le 3$.
Skivemetoden gir så at

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-3}^{3} f(x)^2 \, dx \\ &= 2\pi \int_0^3 (1 + x^3) \, dx \\ &= 2\pi \left[x + \frac{x^4}{4} \right]_0^3 \\ &= \frac{93}{2}\pi. \end{aligned}$$



Den andre likheten fremkommer ved å utnytte at f er en like funksjon.

$\boxed{6}$ Derivasjon med hensyn på x gir at

$$F'(x) = \sqrt{x} \sin x \quad \text{for} \quad 0 < x < 8$$

ved å benytte analysens fundamentalteorem. For å finne x-verdiene som gir at $F'(x) = 0$ ser vi $\sin x = 0$ for $x \in (0, 8)$ som har løsning $x = \pi$ og $x = 2\pi$. Altså er $F'(x) = 0$ for $x = \pi$ og $x = 2\pi$.

$\boxed{7}$ Ved å benytte substitusjonen $u = \sqrt{x}$ får vi at

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} &= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \lim_{b\to\infty} \int_1^{\sqrt{b}} \frac{2}{u^2+1} \, du \\ &= \lim_{b\to\infty} [2 \arctan u]_1^{\sqrt{b}} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

der vi har utnyttet at $u^2 = x$.

$\boxed{8}$ (i) La $a_n = (-1)^n n!/(n+2)!$. Siden $(n+1)(n+2) = n^2 + 3n + 2 > n^2$ for alle $n \geq 1$ følger det at

$$|a_n| = \frac{n!}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} < \frac{1}{n^2}$$

for alle $n \geq 1$. Sammenligningstesten gir så at siden $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ konvergerer (p-rekke med $p = 2$) må også

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

konvergere. Altså er

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{(n+2)!}$$

absolutt konvergent.

(ii) La $f(x) = xe^{-x^2}$ for $x \geq 1$. Legg merke til at f er en kontinuerlig og positiv funksjon for alle $x \geq 1$. Ettersom

$$f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} = (1 - 2x^2)e^{-x^2} < -e^{-x^2} < 0$$

for alle $x > 1$, må f være en strengt avtagende funksjon for alle $x \geq 1$.
Siden alle leddene i rekken er positive og

$$\int_1^{\infty} f(x)\, dx = \int_1^{\infty} xe^{-x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2}(e^{-1} - e^{-b^2}) = \frac{1}{2e} < \infty,$$

gir integraltesten at rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$$

er absolutt konvergent.

(iii) La $a_n = (-1)^n \sqrt{n}/(n+1)$. Siden $1/\sqrt{n} \leq \sqrt{n}$ for alle $n \geq 1$ følger det at

$$|a_n| = \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n} + 1/\sqrt{n}} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

for alle $n \geq 1$. Ettersom rekken $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$ divergerer (dette er en p-rekke med $p = 1/2$ som vi vet er divergent ved for eksempel integraltesten) gir sammenligningstesten at $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergerer.
La $f(x) = \sqrt{x}/(x+1)$ for $x \geq 1$, slik at $|a_n| = f(n) = \sqrt{n}/(n+1)$. For å vise at $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ holder det å vise at at f er en avtagende funksjon for alle $x \geq 1$. Ettersom f er kontinuerlig og

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)} - \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)} < 0$$

for alle $x > 1$ vet vi at f er en strengt avtagende funksjon for alle $x \geq 1$. Altså er $|a_{n+1}| < |a_n|$ for alle $n \geq 1$.
Siden $a_n \to 0$ når $n \to \infty$, $a_n a_{n+1} < 0$ for alle $n \geq 1$ og $|a_{n+1}| < |a_n|$ for alle $n \geq 1$, gir test for alternerende rekker at

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

er konvergent og dermed betinget konvergent ettersom $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergerer.

9 Ved å utnytte at

$$\frac{d}{dx}[x^2y] = x^2y' + 2xy = \ln x.$$

gir integrasjon med hensyn på x at

$$x^2y(x) = \int \ln x\,dx = x\ln x - x + C.$$

Dermed er

$$y(x) = \frac{1}{x^2}(x\ln x - x + C)$$

for $x > 0$. Fra $y(1) = 2$ får vi at $C = 3$. Løsningen til initialverdiproblemet er dermed gitt ved

$$y(x) = \frac{1}{x^2}(x\ln x - x + 3).$$

10 Fra den geometriske rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{der} \quad -1 < x < 1$$

får vi at

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x} \quad \text{der} \quad -1 < x < 1,$$

som igjen gir at

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \ln(1+x) \quad \text{der} \quad -1 < x < 1.$$

Tilfellet $x = 1$ gir den (betinget) konvergente rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Siden $f(x) = \ln(x+1)$ er kontinuerlig for alle $x > -1$ og spesielt i $x = 1$, gir Abels teorem at

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \ln(1+x) \quad \text{for} \quad -1 < x \leq 1.$$

Dermed er

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \lim_{a\to 0+} \int_a^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \lim_{a\to 0+} \int_a^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$$

som skulle vises.

La $a_n = (-1)^n/(n+1)^2$. Legg merke til at $a_n \to 0$ når $n \to \infty$, $a_n a_{n+1} < 0$ for alle $n \geq 0$ og at

$$|a_{n+1}| = \frac{1}{(n+2)^2} < \frac{1}{(n+1)^2} = |a_n|$$

for alle $n \geq 0$. Feilestimatet for alternerende rekker gir så at

$$|I - S_N| \leq a_{N+1} = \frac{1}{(N+2)^2}$$

der S_N er den Nte partialsummen. For at feilen skal være garantert mindre enn 0.005 må altså $1/(N+2)^2 < 0.005$ som vil si at $N > 10\sqrt{2} - 2$. Det minste heltallet N som tilfredstiller denne ulikheten er $N = 13$. Altså gir

$$S_{13} = \sum_{n=0}^{13} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$$

en feil som er garantert mindre enn 0.005. Det vil si, vi må ta med 14 ledd i den alternerende rekken.