TMA4100 Matematikk 1
Løsningsforslag

Eksamen 8. desember 2015

1 Implisitt derivasjon med hensyn på x gir

$$e^{x-y} + xe^{x-y}\left(1 - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) - y - x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0,$$

som innsatt for $(x, y) = (1, 0)$ gir

$$2e - (e+1)\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Det vil si,

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(x,y)=(1,0)} = \frac{2e}{e+1}.$$

Ligningen til tangenten til kurven i punktet $(x, y) = (1, 0)$ er så gitt ved

$$y = \frac{2e}{e+1}(x-1).$$

2 Observer at $x^3 - x = x(x^2-1) = x(x+1)(x-1)$. Delbrøkoppspalting gir at

$$\frac{1}{x^3-x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right) - \frac{1}{x}$$

slik at

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3-x} = \int \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) - \frac{1}{x}\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| - \ln|x| + C.$$

3 I vårt tilfelle er $f(x, y) = \cos(xy - x)$ slik at

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + h\cos(x_n y_n - x_n), \qquad x_n = x_0 + nh,$$

der $h = 0.1$, $x_0 = 0$ og $y_0 = 0.9$. Dermed er

$$y_1 = y_0 + h\cos(x_0 y_0 - x_0) = 0.9 + 0.1\cos 0 = 1,$$

og

$$y_2 = y_1 + h\cos(x_1 y_1 - x_1) = 1 + 0.1\cos 0 = 1.1.$$

4 **a)** Ettersom P_4 er taylorpolynomet av grad 4 til f om $a = 0$ vet vi at

$$P_4(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(0) = 3 + 2x^2 + x^3 + 4x^4$$

slik at $1/3!\, f'''(0) = 1$. Det vil si, $f'''(0) = 6$.

b) Taylors formel gir i vårt tilfelle at

$$E_5(x) = \frac{f^{(5)}(s)}{5!}x^5$$

der s ligger mellom 0 og x. Fra oppgaveteksten vet vi at $|f^{(5)}(x)| \le 12$ for alle x slik at

$$|E_5(x)| \le \frac{12}{5!}|x|^5 = \frac{1}{10}|x|^5.$$

For at $|x|^5/10 \le 10^{-6}$ må $|x|^5 \le 10^{-5}$. Det vil si, $|x| \le 1/10$.

5 Gitt et rektangel med bredde b og høyde h, og omkrets $c = 2b + 2h$ har vi at arealet til rektangelet er gitt ved

$$A = bh = \frac{b}{2}(c - 2b)$$

La $f(b) = (b/2)(c - 2b)$. Vi ønsker å finne b slik at $f(b)$ blir størst mulig. Da f har ingen singulære punkter (punkter der den deriverte ikke er definert), og endepunktene er uinteressante, ser vi på eventuelle kritiske punkter.

Ettersom

$$f'(b) = \frac{1}{2}(c - 2b) - b = \frac{c}{2} - 2b = 0$$

har løsning $b = c/4$ får vi at $h = c/2 - b = c/2 - c/4 = c/4$. Altså får vi størst areal ved å velge $b = h = c/4$ for et rektangel med en gitt omkrets c, det vil si et kvadrat med sidelengde $c/4$.

Vi skal nå finne dimensjonen til den største «rektangulære» pakken som kan sendes som en særpakke. Fra den første delen til oppgaven vet vi at vi får størst areal dersom det vertikale tverrsnittet er et kvadrat. La det vertikale tverrsnittet ha sidelengde x, og dermed areal x^2. Fra regelen til Posten angående særpakker vet vi at

$$4x + s = 150$$

der s er den største lengden. Det vil si, $s = 150 - 4x$. Altså er volumet til særpakken gitt ved

$$V(x) = x^2 s = x^2(150 - 4x).$$

Vi ønsker å finne x slik at $V(x)$ blir størst mulig. Da V har ingen singulære punkter (punkter der den deriverte ikke er definert), og endepunktene er uinteressante, ser vi på eventuelle kritiske punkter.

Ettersom

$$V'(x) = 2x(150 - 4x) - 4x^2 = 300x - 12x^2 = 12x(25 - x) = 0$$

har løsning $x = 0$ og $x = 25$, og der $x = 0$ er uinteressant, vet vi at $V(x)$ må innta sin største verdi når $x = 25$ og dermed $s = 150 - 4x = 50$.

6 Ved analysens fundamentalsetning er

$$f'(x) = \sqrt{x^4 - 1}$$

slik at buelengden til grafen til f på intervallet $[1, 2]$ er gitt ved

$$s = \int_1^2 \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \sqrt{1 + x^4 - 1}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(2^3 - 1) = \frac{7}{3}.$$

7 Fra definisjonen til den deriverte får vi at

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin\frac{1}{h}.$$

Observer at $|\sin 1/h| \leq 1$ for alle $h \neq 0$. Det gir at

$$-|h| \leq h \sin\frac{1}{h} \leq |h|$$

for alle $h \neq 0$. Skviseregelen gir så at

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} h \sin\frac{1}{h} = 0.$$

Altså eksisterer den deriverte til f i $x = 0$, og dermed er f deriverbar i $x = 0$.

8 (i) Observer at $n^2(1/2)^n = n^2 e^{n\ln(1/2)} = n^2 e^{-n\ln 2}$. I kampen mellom en potens (et polynom) og en eksponentialfunksjon, vinner alltid eksponentialfunksjonen, som i vårt tilfelle betyr at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^{n\ln 2}} = 0.$$

Da

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2(1/2)^{n+1}}{n^2(1/2)^n} = \frac{1}{2} < 1$$

gir forholdstesten at rekken $\sum_{n=0}^{\infty} n^2(1/2)^n$ konvergerer. (Merk at det forholdstesten gjør er å sammenligne med en passende geometrisk rekke.)

(ii) Observer at $\sin(2\pi n + \pi/2) = \sin(\pi/2) = 1$. Altså er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

som er den harmoniske rekken. Den harmoniske rekken divergerer (som vi ser ved for eksempel integraltesten).

(iii) Maclaurinrekken (taylorrekken om $a = 0$) til $f(x) = e^x$ er gitt ved

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

for alle $x \in \mathbb{R}$. Spesielt har vi at

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^n}{n!} = e^{10}.$$

9 Maclaurinrekken (taylorrekken om $a = 0$) til $\sin x$ er gitt ved

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

for alle $x \in \mathbb{R}$. Dermed er

$$\sin x^3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{6n+3}$$

som igjen gir at

$$\frac{\sin x^3}{x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{6n}.$$

Altså kan vi uttrykke det bestemte integralet

$$I = \int_0^1 \frac{\sin x^3}{x^3}\, \mathrm{d}x$$

som den alternerende rekken

$$\int_0^1 \frac{\sin x^3}{x^3}\, \mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{6n}\, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,(6n+1)}$$

La s_n være den $n$te partialsummen til rekken. Det vil si,

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!\,(6k+1)}.$$

La a_n være det $n$te leddet til den alternerende rekken. Det vil si,

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,(6n+1)}.$$

I vårt tilfelle er feilen til approksimasjonen for integralet ved partialsummen s_n gitt ved

$$|I - s_n| \leq |a_{n+1}| = \frac{1}{(2n+3)!\,(6n+13)}.$$

For at $|a_{n+1}| \leq 10^{-3}$ må $(2n+3)!\,(6n+13) \geq 10^3 = 1000$. Fra tabellen

n	0	1
$(2n+3)!\,(6n+13)$	78	2280

ser vi at vi må summere opp de to første leddene, a_0 og a_1, for at partialsummen skal gi en approksimasjon til integralet som har feil mindre enn 10^{-3}.